

1. Operații cu puteri

Chiar dacă puterile reprezintă, în general, numere mari, totuși cu ele se pot efectua diferite calcule.

A. Să urmărim calculul: $8^3 \cdot 8^4 = (8 \cdot 8 \cdot 8) \cdot (8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8) = 8^7$

Este ușor de observat că exponentul 7 s-a obținut adunând 3 cu 4. Din acest exemplu, se poate înțelege regula: **pentru a înmulți două puteri care au aceeași bază, scriem baza și adunăm exponenții**, adică

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

Ex. $2^7 \cdot 2^9 = 2^{16}$; $13^{10} \cdot 13 = 13^{11}$; $n^2 \cdot n^3 = n^5$; $5^k \cdot 5^3 = 5^{k+3}$

B. Să urmărim calculul: $2^5 : 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (2 \cdot 2) = 32 : 4 = 8 = 2^3$

Observăm că exponentul 3 din final s-a obținut scăzând 2 din 5. Astfel, se poate înțelege regula: **pentru a împărtăși două puteri care au aceeași bază, scriem baza și scădem exponenții**, adică

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

Ex. $6^9 : 6^4 = 6^5$; $42^{15} : 42 = 42^{14}$; $p^8 : p^7 = p$; $7^n : 7^4 = 7^{n-4}$

C. Să urmărim calculul: $(7^5)^3 = 7^5 \cdot 7^5 \cdot 7^5 = 7^{15}$

Se observă că exponentul 15 din finalul calculului s-a obținut înmulțindu-l pe 5 cu 3. Așadar, se poate deduce regula: **pentru a ridica o putere la altă putere, scriem baza și înmulțim exponenții**, adică

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Ex. $(3^7)^4 = 3^{28}$; $(325^6)^6 = 325^{36}$; $(x^8)^4 = x^{32}$; $(2^a)^5 = 2^{5a}$

D. Să urmărim calculul: $(9 \cdot 5)^3 = (9 \cdot 5) \cdot (9 \cdot 5) \cdot (9 \cdot 5) = 9^3 \cdot 5^3$

Din acest exemplu se înțelege regula: **pentru a ridica un produs la o putere, ridicăm fiecare factor la acea putere**, adică

$$(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$$

Ex. $(2 \cdot 7)^8 = 2^8 \cdot 7^8$; $(4 \cdot n)^2 = 4^2 \cdot n^2 = 16n^2$; $2^y \cdot 3^y = 6^y$

Exerciții și probleme

1. Efectuați, scriind rezultatul ca o putere:

- a) $9^8 \cdot 9^3$ b) $31^{24} \cdot 31^{78}$ c) $4^{25} \cdot 4$ d) $52 \cdot 52^8$
 e) $10^5 \cdot 10^6 \cdot 10^7$ f) $a^2 \cdot a^7$ g) $n^3 \cdot n \cdot n^2$ h) $c^2 \cdot c$

2. Calculați următoarele produse de puteri care au aceeași bază:

- a) $45^9 \cdot 45^6$ b) $3^{978} \cdot 3^{978}$ c) $6 \cdot 6^6$ d) $b \cdot b^5$
 e) $p^4 \cdot p \cdot p^8$ f) $81^2 \cdot 81^{22} \cdot 81$ g) $k^{10} \cdot k$ h) $2^{5+a} \cdot 2^4$

3. Completați spațiile punctate în următoarele calcule:

- a) $3^{24} : 3^6 = 3^{\dots}$ b) $7^{318} : 7^{316} = \dots$ c) $12^{100} : 12^{99} = \dots$
 d) $15^{26} : 15^8 : 15 = 15^{\dots}$ e) $n^{12} : n^5 = n^{\dots}$ f) $6^{42} : 6^{27} : 6^{15} = \dots$

4. Completați căsuțele goale ale tabelului de mai jos cu rezultatele corespunzătoare din mulțimea $A = \{1; 9^8; 9; 81; n; 9; 9^9\}$.

$9^{14} : 9^{12}$	$9^9 : 9$	$9^{99} : 9^{99}$	$9^{35} : 9^{33}$	$n^5 : n^4$	$n^3 : n^2 : n$

5. Pentru a juca toate variantele posibile la loto „6/49” ar fi necesari aproximativ 2^{26} lei. Mimi și Gigi doresc să joace toate variantele, contribuind fiecare cu sume egale. Cu câți lei ar trebuie să participe fiecare?



Facultativ: Calculați apoi accesând <http://www.wolframalpha.com/> ; simbolul pentru ridicare la putere este $^$. De exemplu, 2^{26} se calculează tastând $2\wedge 26$.

6. Cuvântul „neschimbătorul” este cel mai lung cuvânt din limba română, cu toate literele diferite. Literele lui pot fi rearanjate aproximativ în 67^6 moduri diferite. Dacă la un computer s-au realizat 67^5 astfel de rearanjări, a câta parte din toate posibilitățile s-au realizat?

7. Scrieți ca o putere rezultatele următoarelor calcule:

- a) $(5^4)^9$ b) $(27^{29})^{17}$ c) $(2^{10})^{10}$ d) $(62^4)^{11}$
 e) $(z^3)^8$ f) $(m^1)^8$ g) $[(4^3)^2]^5$ h) $[(x^9)^n]^8$

8. Stabiliți care din propozițiile de mai jos sunt adevărate. În cazul celor false, corectăți-le!

- a) $(73^2)^3 = 73^8$ b) $(5^3)^2 = 5^6$ c) $64 = (2^3)^2$
 d) $(16^2)^3 > (16^3)^7$ e) $(x^5)^9 = (x^{15})^3$ f) $[(10^5)^0]^{10} < 10$

9. Eliminați parantezele din următoarele exerciții:

- a) $(2x)^4$ b) $(5y)^2$ c) $(4n)^3$ d) $(10b)^4$
e) $(3xy)^2$ f) $(2^3 \cdot c)^2$ g) $(12k)^9$ h) $(abc)^6$

10. În toate calculele de mai jos, Camelia a greșit. Faceți corecturile necesare!

- a) $(4x)^2 = 4x^2$ b) $(3n)^4 = 81n$ c) $(3r)^2 = 6r^2$
d) $(5 \cdot 10)^3 = 150$ e) $(2x)^5 - 32x^5 = 1$ f) $(5^2 n)^2 = 100n^2$

11. Suprafața Canadei este aproximativ 10^7 km², iar a Egiptului aproximativ 10^6 km². De câte ori este mai mare suprafața Canadei decât a Egiptului?



12. Conform unor estimări făcute de cercetători, creierul unui om are, aproximativ, 10^{11} neuroni, iar al unui gândac aproximativ 10^6 neuroni. De câte ori are mai puțini neuroni gândacul decât omul?

13. Cât este dublul numărului 2^{100} ?

14. Aflați un sfert din 4^{10} .

15. Pentru a exprima cantitatea de informație se folosește unitatea de măsură numită Byte (B). Un Kilobyte (KB) este egal cu 2^{10} B, iar un Megabyte (MB) înseamnă 2^{20} B. Câți KB are un MB?

16. Pentru lungimi foarte mici sunt folosite și unitățile de măsură micrometru (μm) și „nanometru” (nm). Semnificația lor rezultă din relația: $1\text{m} = 10^6 \mu\text{m} = 10^9 \text{nm}$. Cu câți nanometri este egal un micrometru?

17. Arătați că $(3,25 + 6,75)^{13} : (5,5 - 1,50)^{11} > 15,99$

18. Dacă $n = 3^2 - 10 : 2,5$, efectuați $n^7 \cdot n : n^5$.

19. Masa Pământului este aproximativ $6 \cdot 10^{24}$ kg, iar masa Soarelui este aproximativ $2 \cdot 10^{30}$ kg. Arătați că masa unuia din cele două corpuri cerești este de cel puțin 300.000 de ori mai mare decât masa celuilalt.

20. Planeta Neptun are masa aproximativ $102 \cdot 10^{24}$ kg, iar Pământul cam $6 \cdot 10^{24}$ kg. De câte ori este mai mare masa lui Neptun decât a planetei noastre?

21. Efectuați:

a) $4^{29} \cdot 4^2 : 4^{13}$

b) $6^{35} : 6^{28} \cdot 6$

c) $(2n)^3 \cdot (3n)^2$

d) $(14^5)^4 \cdot (14^6)^2$

e) $(36^9)^{12} : (36^{15})^7$

f) $(3a^2)^4 \cdot 10a^2$

22. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor de mai jos:

a) $8^{49} \cdot 8^2 = 8^{52} : 8$

b) $(2^{35})^{25} : 2^{875} = 1$

c) $(3^9)^7 - (3^{21})^3 \geq 0$

d) $(6b)^2 \cdot b = 6b^3$

e) $7^5 \cdot 16^5 = 112^5$

f) $(5^2)^4 \cdot (10^2)^2 = 2500 \cdot 10^2$

23. Arătați că nicio ecuație de mai jos nu are soluția număr natural par:

a) $x + 2^{10} : 2^7 = 3^3$

b) $5^{17} \cdot a = 5^{19}$

c) $\frac{2}{5} + b^5 : b^4 = \frac{27}{5}$

d) $y - 2 = 7^{218} : 7^{217}$

e) $2n + 3^{11} \cdot 3 = (3^6)^2 + 10$

f) $\frac{x}{23^7} = \frac{1}{23^3}$

24. Precizați care din ecuațiile de mai jos au soluția număr natural divizibil cu 3:

a) $3^{41} \cdot a = 3^{44}$

b) $k + 7 = 5^{21} \cdot 5 : 5^{24}$

c) $2 \cdot x^4 : x : x^2 - \frac{3}{10} = \frac{177}{10}$

d) $\frac{c + (3^6)^9 - (3^{18})^3}{2} = 2 \cdot 3^2$

25. Aflați elementele mulțimii $M = \{x \in \mathbb{N}^* / x \leq (4^4)^4 : (4^3)^5\}$.

26. Calculați cardinalul mulțimii $T = \{n \in \mathbb{N} / 3^8 \cdot 3^7 \leq n \leq 3^{18} : 3^3\}$.

27. În astronomie, pentru a exprima distanțele uriașe între corpurile cerești, se folosește unitatea de măsură numită „an-lumină” (a.l.), acesta reprezentând distanța parcursă de lumină într-un an. Aproximativ, $1 \text{ a.l.} \approx 10^{13} \text{ km}$. Exprimați ca putere a lui 10, în kilometri, diametrul galaxiei noastre, acesta fiind aproximativ 100.000 a.l.

28. Pentru a străbate distanța București – Napoli, care este de aproximativ 1000 km, un avion Airbus A 320 are nevoie, în medie, de o oră. În câte ore ar parcurge acest avion distanța de un an-lumină? Cu câte cifre se scrie acest număr?



29. Ce rezultat se obține împărțind pătratul lui 6^8 la cubul lui 6^5 ?

30. Scrieți ca putere produsul dintre treimea lui 3^{12} și triplul lui 3^9 .

31. Eliminați parantezele în exercițiile de mai jos, folosind proprietatea înmulțirii de a fi distributivă față de adunare și scădere:

a) $3^5 \cdot (3^7 + 3^9)$

b) $6^{10} \cdot (6^{10} - 6)$

c) $7^4 \cdot (7^8 + 1)$

d) $(12 + 12^6) \cdot 12^3$ e) $8 \cdot (8^7 + 8^9 - 8^5)$ f) $n^3 \cdot (n^{11} + n^{12})$

32. Gheorghită a dorit să elimine parantezele în exercițiile de mai jos. La unele din ele a greșit. Stabiliți care sunt acestea și ajutați-i pe Gheorghită.

a) $37^2 \cdot (37^3 - 37^2) = 37^5 - 37^4$ b) $52^5 \cdot (52^5 - 1) = 52^{20} - 52^5$
 c) $(2 + 2^6) \cdot 2^{12} = 2^{12} + 2^{18}$ d) $x^3 \cdot (x^7 + x^2 - x) = x^{21} + x^6 - x^3$

33. Calculați media aritmetică a numerelor $19^{31} : 19^{30}$ și $(9^7)^7 : (9^1)^{47}$.

34. Aflați cifrele a și b , știind că \overline{ab} este media aritmetică a numerelor $12^2 \cdot (12^2)^8 : 12^{17}$ și $9^8 \cdot 6^8 : 54^7$.

35. Ce rest se obține prin împărțirea lui $3^8 : 3^3$ la $4 \cdot (6^7)^7 \cdot 6^7 : 6^{55}$?

36. La o împărțire cu rest, împărțitorul este 22, câtul este 22^7 , iar restul este 2. Arătați că deîmpărțitul d îndeplinește condiția $d > 22^8$.

37. Demonstrați că fracțiile $\frac{17^{24}}{17^{15}}$ și $\frac{17^8}{17^5}$ sunt echivalente.

38. Frația $\frac{5^{24} \cdot 5^{26}}{(5^{25})^2}$ este echivaltă?

39. Aflați ultima cifră a numărului $2^{18} \cdot 2^{28} : (2^7)^3$.

40. Demonstrați că numărul $(3^{21} \cdot 3^6 \cdot 3^5)^9 - 2^2$ este multiplu al lui 5.

41. Găsiți valoarea logică a propozițiilor de mai jos:

a) $4^5 \cdot 4^9 = 4^{14}$ b) $55^9 + 55^{10} = 55^{19}$ c) $(2^{12})^8 = (2^8)^{12}$
 d) $9^{96} = 9^8 \cdot 9^7$ e) $(8 + 15)^5 = 8^5 + 15^5$ f) $7^{16} \cdot 7 \geq 7^{17}$

42. La un test, Marița a trebuit să precizeze valoarea de adevăr a unor propoziții. Răspunsurile date sunt cele din imaginea de mai jos.

Pentru fiecare răspuns corect primește două puncte. Care a fost nota primită de Marița la acest test, dacă sunt prevăzute două puncte din oficiu?

a) $3^{10} \cdot 6^{10} = 18^{20}$ (A) b) $(3+11)^2 = 3^2 + 11^2$ (F)
 c) $12^5 - 2^5 = 10^5$ (F) d) $1^6 + 1^3 > 1^9$ (A)

43. Se consideră mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} / 2^2 \leq b \leq 3 \cdot 3^{41} : (3^5)^8\}$ și $B = \{b \in \mathbb{N}^* / a < 3^{100} : 3^{98} - 2\}$. Aflați $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, și $B - A$.

44. Fie mulțimile $C = \{c \in \mathbb{N} / (6^4)^{13} \leq (6^c)^2 < 6^{25} \cdot 6^{33} \}$ și c este par} și $D = \{d / 2^{3d} = (2^{13})^6\}$. Aflați $D \cup C$, $C \cap D$, $(C - D) \cup (C - \mathbb{N})$.

45. Arătați că $4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \dots \cdot 4^{36} < (4^{134})^5$

46. Cu câte cifre se scrie numărul $10^{16} \cdot 10^{15} \cdot 10^{14} \cdot \dots \cdot 10^2 \cdot 10$?

47. Suprafața statului Sri Lanka este aproximativ 2^{16} km².

a) Calculați 25% din această suprafață.

b) Districtul Jaffna din Sri Lanka are suprafața aproximativ 2^{10} km². De câte ori este mai mică suprafața acestui district decât a întregii țări?

48. Masa Terrei este aproximativ $5 \cdot 10^{24}$ kg.

Din această masă, oxigenul reprezintă aproximativ

30%. Aflați cât este masa oxigenului pe Terra.

Exprimați acest rezultat și în tone.



49. Într-o zi ploioasă, Aglaia a calculat $2^{6^2} : (2^6)^2$. A obținut rezultatul 16.777.218. Dovediți că Aglaia a greșit.

50. Aflați toate numerele naturale n pentru care $(5^n)^9 \leq 5^{3^3}$

51. Dați factor comun în calculele de mai jos, după modelul de la a):

a) $8^{15} + 8^{10} = 8^{10} \cdot (8^5 + 1)$

b) $2^{26} + 2^{19}$

c) $5^{14} - 5^{11}$

d) $7^{36} + 7^{41}$

e) $9^{17} + 9^{18} + 9^{19}$

f) $n^{51} + n$

52. Identificați un calcul din cele de mai jos, în care Petronel a greșit; el avea sarcina să scoată factor comun:

a) $3^{14} + 3^{10} = 3^{10} \cdot (3^4 + 1)$

b) $6 + 6^{12} = 6 \cdot (1 + 6^{11})$

c) $4^{75} - 4^{74} = 4^{74} \cdot (4 + 1)$

d) $x^7 + x^7 = x^7 \cdot (1 + 1)$

53. Efectuați calculele de mai jos, scriind puterile care apar cu aceeași bază, conform indicațiilor:

a) $2^{94} : 8$ (Indicație: $8 = 2^3$)

b) $125^7 \cdot 25^{13}$ (Indicație: $125 = 5^3$; $25 = 5^2$)

c) $9^{14} : 3$ (Indicație: $9 = 3^2$)

d) $32^5 \cdot 16^6$ (Indicație: $32 = 2^5$; $16 = 2^4$)

54. Aflați:

a) $2^{31} : 4$

b) $27^8 : 3$

c) $25^{13} : 5$

d) șesimea lui 36^{18}

e) $100^6 \cdot 1000^2$

f) $81^7 : 9^{12}$

g) dublul lui 8^{100}

h) $64^3 \cdot 16$

55. Demonstrați că numărul $[0,58(3) + \frac{101}{12}]^5 \cdot 9^4$ este natural și are un vecin de forma \overline{xy} .

56. Cu cât trebuie înmulțit 12,5 pentru a obține cubul lui $10^{33} \cdot (10^{16})^2$?

57. Aflați cinci numere naturale egale, care au suma 5^{55} .

58. Găsiți două numere naturale, care au diferența $6^{24} \cdot (6^3)^7$ și suma 2^{23} .

59. Vasilius Mathematicus este proprietarul unui teren dreptunghiular cu suprafața 10 ha. Dacă lățimea este 0,01 km, câți metri are lungimea?

60. Un parc are forma unui pătrat cu latura 4^5 mm. Exprimați în mm perimetrul acestui parc.

61. Cu câte zerouri se termină numărul $2^{13} \cdot 5^{13} \cdot 10$?

62. Aflați câte cifre „3” conține numărul $(5^5 \cdot 2^8 + 1) \cdot 7 + 4^4$.

63. Efectuați:

- a) $(5^{18} \cdot 3 + 5^{17} \cdot 7) : 22$
- b) $(5 \cdot 2^{38} - 36 \cdot 2^{25}) : 2^2$
- c) $(9^{46} - 8 \cdot 9^{45}) : 27^{30}$

64. Trei puteri ale lui 2 au exponenții numere naturale consecutive. Arătați că împărțind la 7 suma celor trei puteri se obține un cât egal cu cel mai mic dintre numere.

65. În imaginea alăturată este prezentată o metodă cu ajutorul căreia se poate calcula o sumă de puteri care au aceeași bază: $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$.

Studiați cu atenție acest procedeu și folosiți-l pentru calcularea sumei

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{25}$$

$$\begin{aligned}
 & 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} = ? \\
 & a = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} \quad | \cdot 2 \\
 & 2a = \underbrace{2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{100}}_{a-2} + 2^{101} \\
 & 2a = a - 2 + 2^{101} \\
 & 2a - a = 2^{101} - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2^{101} - 2
 \end{aligned}$$

66. Calculați următoarele sume de puteri:

- a) $2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{53}$
- b) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{31}$
- c) $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{18}$
- d) $5^{30} + 5^{29} + 5^{28} + \dots + 5^2 + 5$