3. Compararea puterilor

În diverse situaţii, dându-se două puteri, va trebui să stabilim care este mai mare. Avem unele cazuri simple, care nu prezintă nicio dificultate.

Ex. a) $5^{13} > 5^{10}$, deoarece baza este aceeaşi şi prima putere are exponentul mai mare

b) $12^{34} < 14^{34}$, deoarece exponentul este acelaşi şi prima putere are baza mai mică

c) $18^{21} > 15^{20}$, deoarece prima putere are şi baza, dar şi exponentul mai mare decât a doua putere

Compararea nu mai este aşa rapidă în cazurile în care puterile nu au acceaşi bază, nu au acelaşi exponent şi nu sunt nici în situaţia din al treilea exemplu de mai sus.

Ex. Nu putem direct preciza care din numerele 8^{14} şi 4^{19} este mai mare.

În astfel de situaţii, vom încerca să facem ca puterile să aibă sau aceeaşi bază sau acelaşi exponent.

A. Compararea puterilor scriindu-le cu aceeaşi bază

Să spunem că avem de comparat, de exemplu, numerele 8^6 şi 4^{10}. Observăm că numerele 8 şi 4 se pot scrie ca puteri cu baza 2, deoarece $8 = 2^3$ şi $4 = 2^2$. Aşadar, putem scrie:

$8^6 = (2^3)^6 = 2^{18}$; $4^{10} = (2^2)^{10} = 2^{20}$. Deoarece $2^{18} < 2^{20}$ => $8^6 < 4^{10}$.

Observaţie

Se pot scrie ca puteri cu baza 2 numerele 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Se pot scrie ca puteri cu baza 3 numerele 3, 9, 27, 81, 243, ...

Se pot scrie ca puteri cu baza 5 numerele 5, 25, 125, 625, ...

B. Compararea puterilor scriindu-le cu acelaşi exponent

Să comparăm, de exemplu, numerele 3^{14} şi 2^{21}. Observăm că exponenţii 14 şi 21 se pot scrie ca produse de doi factori din care unul este acelaşi, 7, deoarece 14 =2·7 şi 21=3·7. Aşadar, vom scrie ambele puteri ca puteri cu acelaşi exponent, 7:

$3^{14} = 3^{2 \cdot 7} = (3^2)^7 = 9^7$; $2^{21} = 2^{3 \cdot 7} = (2^3)^7 = 8^7$ Deoarece $9^7 > 8^7$ => $3^{14} > 2^{21}$.

Observaţie Când încercăm să scriem puterile ca puteri cu acelaşi exponent, este bine să-l alegem cât mai mare posibil.

Exerciţii şi probleme

1. Comparaţi următoarele numere, calculând puterile:

a) 3^4 şi 4^3 b) 2^5 şi 5^2 c) 1^{42} şi 4^1 d) 9^2 şi 101^1

e) 6^3 şi 5^4 f) 7^2 şi 3^3 g) 5^1 şi 10^0 h) 12^2 şi 5^3

2. Din următoarele şiruri de numere, alegeţi-l pe cel mai mare:

a) $2^6; 3^3; 7^2$ b) $10^2;\ 5^3;\ 2^7$ c) $3^5; 300;\ 4^4$

d) $1^3;\ 2^1;\ 3^0$ e) $11^2;\ 3^4;\ 136;\ 81^1$ f) $2^5;\ 4^3;\ 6^2;\ 3^2 \cdot 4$

3. Comparaţi două puteri, ştiind că prima are exponentul 5 şi baza 3, iar cealaltă are baza 5 şi exponentul 3.

4. Cu cât este mai mare unul din numerele 10^4 şi 5^6 decât celălalt?

5. Completaţi căsuţele cu unul din simbolurile $<$, $>$, $=$:

a) $5^{17} \square\ 7^{19}$ b) $13^5 \square\ 13^6$ c) $3^{52} \square\ 3^{25}$ d) $24^{24} \square\ 22^{23}$

e) $8^{43} \square\ 10^{43}$ f) $8^{43} \square\ 10^{43}$ g) $10^3 \square\ 1000$ h) $8^3 \square\ 23^2$

6. Aflaţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii:

a) $6^{27} < 9^{27}$ b) $14^{301} > 11^{293}$ c) $2^6 = 6^2$ d) $9^{11} \le 9^{12}$

e) Cel mai mic dintre numerele 18^2 şi 7^3 este impar f) $7^8 \le 7^9 < 8^9$

7. Comparaţi următoarele puteri, scriindu-le ca puteri cu baza 2:

a) 4^7 şi 2^9 b) 2^{15} şi 8^6 c) 16^{10} şi 8^{13} d) 8^{33} şi 32^{23}

e) 2^{102} şi 64^{17} f) 64^5 şi 32^7 g) 128^{15} şi 8^{35} h) 4^{32} şi 256^8

8. Comparaţi următoarele puteri, scriindu-le ca puteri cu baza 3:

a) 3^{13} şi 9^6 b) 27^5 şi 3^{14} c) 9^{10} şi 27^7 d) 81^{20} şi 3^{80}

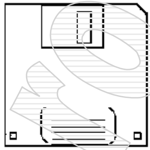
e) 27^{16} şi 81^{13} f) 243^8 şi 3^{42} g) 27^{15} şi 243^{11} h) 9^{32} şi 81^{16}

9. Stabiliţi care din propoziţiile de mai jos sunt adevărate:

a) $6^{21} > 36^{11}$ b) $25^{12} = 5^{24}$ c) $25^{25} > 125^{15}$ d) $10^{91} < 100^{51}$

e) $1000^9 < 100^{11}$ f) $49^{207} = 7^{407}$ g) $11^{11} > 121^6$ h) $144^{11} > 12^{23}$

10. Corpul unui om este format, aproximativ, din 100^7 celule. Numărul total al furnicilor de pe tot pământul este estimat la 10^{15}. Comparaţi cele două numere.



11. Unitatea de măsură a informaţiei denumită MegaByte (MB) este egală cu 2^{20} byte. Comparaţi acest număr cu numărul 8^{7} byte, care reprezenta capacitatea aproximativă de stocare a unui foarte vechi model de dischetă.

12. Scrieţi în ordine crescătoare următoarele şiruri de numere naturale:

a) 9^{12}, 3^{19}, 27^{8} b) 2^{41}, 4^{21}, 16^{11} c) 5^{11}, 25^{6}, 4^{10}
d) 100^{41}, 1000^{37}, 10^{80} e) 25^{17}, 5^{33}, 125^{12} f) 8^{301}, 32^{119}, 64^{83}
g) 36^{13}, 6^{17}, 216^{9} h) 243^{27}, 81^{37}, 27^{47} i) 13^{19}, 169^{9}, 13^{21}

13. Comparaţi următoarele puteri, scriindu-le ca puteri cu exponentul 5:

a) 4^{10} şi 3^{15} b) 6^{10} şi 2^{25} c) 19^{5} şi 4^{10} d) 11^{10} şi 2^{35}
e) 30^{10} şi 10^{15} f) 3^{20} şi 4^{15} g) 5^{15} şi 100^{5} h) 2^{40} şi 3^{25}

14. Cercetaţi care din propoziţiile de mai jos sunt adevărate, scriind puterile ca puteri cu acelaşi exponent:

a) $6^{14} > 3^{21}$ b) $45^{11} = 7^{22}$ c) $5^{18} > 10^{12}$ d) $10^{20} < 20^{10}$
e) $5^{26} < 3^{39}$ f) $9^{24} = 5^{36}$ g) $3^{30} > 7^{18}$ h) $20^{34} > 8^{51}$

15. Comparaţi perechile de numere de mai jos, alegând metoda adecvată:

a) 8^{10} şi 5^{15} b) 8^{10} şi 4^{17} c) 32^{400} şi 10^{600} d) 12^{12} şi 9^{18}
e) 625^{4} şi 125^{7} f) 16^{41} şi 20^{44} g) 100000^{12} şi 10000^{11}

16. Scrieţi în ordine descrescătoare următoarele şiruri de numere:

a) 128^{7}; 32^{11}; 8^{15} b) 17^{128}; 277^{64}; 7^{192} c) 81^{162}; 9^{324}; 27^{201}
d) 42^{12}; 24^{18}; 10^{24} e) 3^{40}; 4^{30}; 7^{20} f) 5^{22}; 2^{55}; 3^{33}
g) 71^{31}; 4^{93}; 7^{62} h) 20^{40}; 40^{20}; 30^{30} i) 3^{404}; 2^{707}; 5^{303}
j) 10^{38}; 5^{57}; 50^{19} k) 21^{106}; 4^{159}; 3^{530} l) 4^{36}; 3^{48}; 6^{24}

17. Arătaţi că cel mai mare dintre numerele 8^{12} şi 16^{8} este soluţie a ecuaţiei $x - 2^{36} = 0$

18. Comparaţi 4^{38} cu soluţia ecuaţiei $15^{41} \cdot a = 15^{60}$.

19. Numărul atomilor din 2 grame de carbon este aproximativ 10^{23}. Arătaţi că în 20 grame de carbon se află mai mult de 2^{84} atomi.

20. Biologii estimează că numărul peştilor din toate lacurile, mările şi oceanele lumii este aproximativ 10^{12}. Comparaţi acest număr cu numărul stelelor din galaxia noastră, acesta fiind aproximativ 3^{24}.

21. Pentru perechile de numere de mai jos, stabiliţi dacă cel mai mic este divizibil cu 2:

a) 5^{14} şi 2^{35} b) 10^{40} şi 3^{80} c) 3^{15} şi 2^{20} d) 3^{39} şi 4^{26}
e) 7^{10} şi 4^{15} f) 26^{4} şi 9^{6} g) 31^{20} şi 20^{30} h) 6^{22} şi 3^{33}

22. Pentru fiecare din perechile de numere de mai jos, stabiliţi ce rest se obţine prin împărţirea la 2 a celui mai mare dintre ele:

a) 2^{111} şi 9^{74} b) 12^{46} şi 5^{69} c) 10^{41} şi 5^{123} d) 3^{45} şi 4^{30}
e) 25^{18} şi 8^{27} f) 3^{48} şi 6^{36} g) 5^{51} şi 2^{119} h) 2^{78} şi 3^{52}

23. Aflaţi sfertul celui mai mare dintre numerele 8^{38}, 4^{48}, 16^{28}.

24. Comparaţi cubul lui 10.000 cu pătratul lui 1.000.000.

25. Fie mulţimea $A=\{x \in \mathbf{N} / (4^5)^6 < x < (8^{10})^2\}$. Arătaţi că $A=\Phi$.

26. Calculaţi cardinalul mulţimii $B=\{n \in \mathbf{N} / 5^4 \leq n \leq 3^6\}$.

27. Unul din numerele 6^{18} şi 3^{27} este pătrat perfect. Este cel mai mare sau cel mai mic?

28. Arătaţi că cel mai mic dintre numerele 4^{15}, 16^{8}, 32^{7} este cub perfect.

29. Eliminaţi parantezele numerelor de mai jos, folosind proprietatea înmulţirii de a fi distributivă faţă de adunare şi scădere, iar apoi comparaţi numerele a şi b.

$$a = 9^6 \cdot (9^9 + 9^4), \qquad b = 27^6 \cdot (27^4 + 1)$$

30. Comparaţi numerele:

a) $x=2^{39} + 2^{41}$ şi $y=2^{40} + 2^{40}$ (indicaţie: daţi factor comun)
b) $a=3^{41} \cdot 11^{42}$ şi $b=27^{13} \cdot 121^{21}$

31. Eliminaţi cel mai mic dintre numerele 9^{12}, 27^{8}, 2^{36}, iar apoi la cele două rămase calculaţi-le media aritmetică.

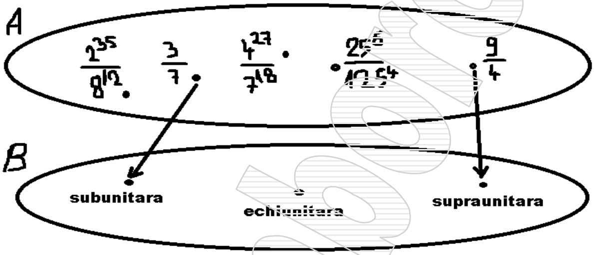
32. Daţi exemplu de pătrat perfect n, astfel încât $125^7 < n < 25^{12}$.

33. Împărţitorul şi restul unei împărţiri sunt elemente ale mulţimii A={3^{27} ;5^{18}}. Care este restul?

34. Arătaţi că nu există împărţire cu rest, care să aibă câtul 9^{19}, restul 7^{25} şi împărţitorul 49^{12}.

35. Demonstraţi că fracţiile $\frac{3^9}{144^5}$ şi $\frac{1}{4^9}$ nu sunt echivalente.

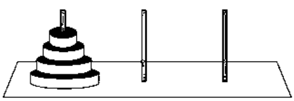
36. Trasaţi săgeţi de la elementele mulţimii A la elementele mulţimii B, pentru a obţine asocieri corecte. Două săgeţi sunt deja trasate ca model.



37. Comparaţi numerele de mai jos, utilizând indicaţiile:
a) 5^{19} şi 3^{31} (*Indicaţie*: comparaţi 5^{20} şi 3^{30})
b) 7^{13} şi 4^{21} (*Indicaţie*: comparaţi 7^{14} şi 4^{21})
c) 10^{26} şi 5^{41} (*Indicaţie*: comparaţi 10^{26} şi 5^{39})

38. Stabiliţi valoarea logică a propoziţiilor de mai jos:
a) $2^{14} > 3^{11}$ b) $7^{12} \ge 16^9$ c) $13^{43} < 6^{67}$ c) $10^{29} \le 2^{102}$

39. „Turnurile din Hanoi" este un joc format din trei tije şi câteva discuri, de diametre diferite, aşezate iniţial pe una din tije. Trebuie mutate discurile pe altă tijă, luând doar câte unul, astfel încât de fiecare dată un disc mic să nu se afle deasupra unui disc mare. O legendă spune că într-un templu indian jocul este compus din 64 de discuri de aur, pe care călugării brahmani le mută mereu, pentru a ajunge la aranjarea finală. Numărul de mutări necesare este $2^{64}-1$. Presupunând că brahmanii fac câte o mutare pe secundă, arătaţi că mutarea completă a discurilor nu s-ar termina mai repede de $5\cdot 10^{11}$ ani. <u>*Indicaţie*</u>: 10^9 secunde ≈ 30 ani.



40. S-a calculat că numărul total de configuraţii posibile la jocul „Go” este 3^{361}, iar la şah de 10^{120}. La care din cele două jocuri sunt posibile mai multe configuraţii?

41. Calculaţi $(9^{18}+27^{12})\cdot(9^{18}-27^{12})$.

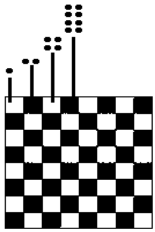
42. Numărul $18^{34}-6^{51}$ este natural? Justificaţi răspunsul dat.

43. Aflaţi numerele naturale care verifică relaţiile:
a) $2^x=8^5$; b) $27^n=9^{12}$; c) $5^{a-4}=25^4$; d) $10^y<1000^6$; e) $36^{x+2}\geq 6^6$

44. Arătaţi că numărul 25 este o soluţie a inecuaţiei $7^{4x-2}\leq 49^{2x+3}$.

45. O coală de hârtie are grosimea 1 mm. Ea se îndoaie o dată, grosimea ajungând la 2 mm. Se îndoaie încă o dată, grosimea fiind acum 4 mm. La a treia îndoire, grosimea va fi 8 mm. Arătaţi că dacă s-ar continua în acest mod cu îndoiturile, la a 21-a îndoire grosimea colii ar fi mai mare de 10^6 mm, adică grosimea colii ar depăşi 1 km.

46. Legenda jocului de şah spune că acesta a fost inventat de un înţelept, care ca răsplată a cerut să primească un bob de grâu pentru primul pătrat, 2 boabe pentru al doilea, 4 pentru al treilea şi aşa mai departe, numărul boabelor să se dubleze de fiecare dată.



Arătaţi că numărul boabelor de grâu pe care ar fi trebuit să le primească pentru ultimul pătrat este mai mare decât 10^{18}, adică 1 urmat de 18 zerouri!

Notă

De fapt, numărul 2^{63} are 19 cifre, fiind egal cu 9223372036854775808.

47. Folosind faptul că numărul 10^n are *n+1* cifre (fiind egal cu 1 urmat de *n* zerouri), arătaţi că:

a) Numărul 2^{84} are cel puţin 25 cifre

b) Numărul 3^{42} are cel mult 22 cifre

c) Numărul 5^{60} se scrie cu un număr de cifre cuprins între 41 şi 46.

48. Într-o zi, Petrişor a vrut să calculeze 31^{10}. După mult timp, neştiind de existenţa site-ului http://www.wolframalpha.com, a obţinut rezultatul 819628332869850801. Arătaţi că Petrişor a greşit calculul.