

## 4. Divizibilitate. Divizori. Multipli. Criterii de divizibilitate cu 4, 25, 3, 6

Să ne amintim din clasa a V-a că, dacă un număr natural  $a$  se împarte exact la un număr natural  $b$ , spunem că  $a$  este **divizibil** cu  $b$ . Acest lucru poate fi spus în mai multe moduri.

**Ex.** 32 este divizibil cu 4 (scriem  $32 : 4$ )

32 se divide cu 4

4 îl divide pe 32 (scriem  $4 \mid 32$ )

4 este divizor al lui 32

32 este multiplu al lui 4

Am mai văzut că mulțimea divizorilor unui număr natural  $n$  se notează  $D_n$ , iar mulțimea multiplilor se notează  $M_n$ .

**Ex.**  $D_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$ ,  $M_7 = \{0; 7; 14; 21; 28; \dots\}$

**Atenție!** Orice număr are o infinitate de multipli, dar mulțimea divizorilor este finită (adică nu sunt o infinitate).

O definiție mai „sofisticată” a divizibilității ar fi următoarea: spunem că  $a$  este divizibil cu  $b$  dacă există  $c \in \mathbb{N}$  astfel încât  $a = b \cdot c$ . În acest caz,  $b$  este **divizor** al lui  $a$  sau, același lucru spus altfel,  $a$  este **multiplu** al lui  $b$ .

**Ex.** 63 se divide cu 7, deoarece există  $9 \in \mathbb{N}$  astfel încât  $63 = 7 \cdot 9$

$73 \mid 73 \cdot 4085$ ;

Multiplii lui 6 sunt toate numerele de forma  $6k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

Tot în clasa a V-a s-au prezentat așa-numitele **criterii de divizibilitate** cu 2; 5; 10, care sunt niște reguli care ne spun dacă un număr se divide cu 2, 5 sau 10, dar (foarte folositor!), fără a efectua împărțirea.

**Ex.** 5378 se divide cu 2, deoarece 5378 are ultima cifră 8

5 îl divide pe 98.365, deoarece 98.365 are ultima cifră 5

29.430 este divizibil cu 10, deoarece 29.430 are ultima cifră 0

Vom învăța acum și alte criterii de divizibilitate, pentru 3; 4; 9; 25. Justificarea lor va fi prezentată în lecțiile viitoare.

**Criteriul de divizibilitate cu 4:** un număr natural se divide cu 4 dacă numărul format din ultimele două cifre ale sale se divide cu 4.

**Ex.** 7312 se divide cu 4, deoarece 12 este divizibil cu 4

4 nu este divizor al lui  $\overline{8a62}$ , deoarece 62 nu se divide cu 4.

**Criteriul de divizibilitate cu 25:** un număr natural este divizibil cu 25 dacă numărul format din ultimele două cifre ale sale se divide cu 25.

**Ex.** 20.150 este divizibil cu 25, deoarece 50 se divide cu 25

1xy05 nu este multiplu al lui 25, deoarece 1xy05 nu se divide cu 25.

**Criteriul de divizibilitate cu 3:** un număr natural se divide cu 3 dacă suma cifrelor sale se divide cu 3.

**Ex.** 4602 este divizibil cu 3, deoarece  $4+6+0+2=12$  și 12 se divide cu 3  
523 nu se divide cu 3, deoarece  $5+2+3=10$  și 10 nu se divide cu 3

**Criteriul de divizibilitate cu 9:** un număr natural se divide cu 9 dacă suma cifrelor sale se divide cu 9.

**Ex.** 71082 este divizibil cu 9, deoarece  $7+1+0+8+2=18$  și 18 se divide cu 9  
3984 nu se divide cu 9, deoarece  $3+9+8+4=24$  și 24 nu se divide cu 9

**Exerciții și probleme**

1. Stabiliți care din propozițiile de mai jos sunt adevărate:

- a) 36 este divizibil cu 8
- b)  $420 \div 2$
- c) 1001 se divide cu 7
- d) 3490 este multiplu al lui 10
- e)  $5 \mid 1970$
- f)  $1 \notin D_3$
- g) 6 este divizor al lui 86
- h)  $0 \div 13$
- i)  $2 \in M_{834.061}$

2. Unele din afirmațiile de mai jos sunt false. Aflați care.

- a) 58 nu este divizibil cu 5
- b)  $3027 \div 2$
- c)  $0 \in M_{106}$
- d)  $1441 \notin D_{11}$
- e) 6 nu divide 216
- f)  $5 \mid 1970$
- g) 64 se divide cu 1
- h) 8 este divizor al lui 8
- i)  $2 \div 734$

3. Stabiliți în care din căsuțele de mai jos poate fi plasat unul din simbolurile  $\mid$  sau  $\notin$ , pentru a obține enunțuri corecte.

- a)  $10 \square 510$
- b)  $2 \square 57$
- c)  $111 \square 37$
- d)  $92 \square 92$
- e)  $70 \square 71$
- f)  $195 \square 5$
- g)  $3 \square 195$
- h)  $608 \square 10$









4. La o lucrare de control cu 8 cerințe, Didona a scris ceea ce vedeți alăturat. Ce notă credeți că merită?

Clasa a VI-a B		Didona M	
a) $5 \mid 1995$	b) $1690 \div 13$	c) $14 \notin D_{194}$	
d) 25 are 3 divizori		e) 10 divide 1020	
f) $1 \mid 0$	g) $106 \in M_2$	h) $91 \div 1$	

5. Stabiliți care numere din mulțimea  $A = \{1208; 666; 67293; 398; 1314; 730300; 1902\}$  sunt divizibile cu 4.
6. Selectați toate numerele naturale care se divid cu 2, dar nu se divid cu 4, din șirul 7358, 7359, 7360,.....,7372.
7. Corniciu a întocmit o schiță care cuprinde anul unor descoperiri științifice.. Care din anii care apar sunt divizibili cu 25?

Descoperirea	Micro organisme	Butelia de Leyda	Bateria electrică	Razele X	Teoria relativității
Anul	1675	1745	1800	1895	1905

8. Câte numere naturale de patru cifre, cu cifra sutelor 7, se divid cu 25?
9. Alegeți din mulțimea  $M = \{3206; 468; 57093; 301; 7767; 8070; 1101\}$  elementele care sunt divizibile cu 3.
10. Care din anii cuprinși în tabelul de la problema 7 sunt multipli de 3?
11. Subliniați numerele divizibile cu 9 din șirul 2656; 3024; 4581; 1008; 60231; 9387; 651111.
12. În tabelul de mai jos sunt indicate, în euro, prețurile unor automobile expuse pentru vânzare pe un site cu specific auto:

 Volkswagen Up (3 usi) 1.0 75CP Take Up!	9095 €	 Kia Picanto (3 usi) 1.0 Base	9212 €
 Dacia Sandero 1.2 16V 75CP Laureate	9100 €	 Fiat Panda 1.2 69 CP Pop	9216 €
 Volkswagen 1.0 60CP Take Up! Blue Technology	9139 €	 Ford 1.8 94CP	9160 €
 Suzuki Swift facelift 1.2 94CP MT5 GA	9160 €	 Citroen C1 facelift 1.0i 68 Attraction	9918 €

Subliniați prețurile care sunt divizibile cu următoarele numere, folosind tipul de linie indicat:

**2** ———    **3** - - - -    **4** ~~~~~    **5** +++++  
**10** □□□□    **25** .....    **100** ◇◇◇◇

13. Scrieți toate numerele naturale de forma  $\overline{4x1}$  divizibile cu 3.
14. Care este cel mai mare număr natural de forma  $\overline{5a2b4}$  divizibil cu 9?
15. Calculați  $(5^7)^4 \cdot 5^6 : 5^{32}$  și arătați că se obține un număr care are cel mult trei divizori naturali.
16. Pătratul lui  $8^{12}$  se împarte la cubul lui  $4^{12}$ . Demonstrați că rezultatul astfel obținut este divizor al numerelor 4008, 8400 și 8844.

17. Schimbați ordinea cifrelor numărului 81.532.769 astfel încât numărul astfel obținut să fie multiplu al lui 25. Câte soluții sunt?

18. Enumerați toți anii bisecți din al șaselea deceniu al secolului XX (*Indicație*: anii bisecți sunt divizibili cu 4).

19. Arătați că 9 este divizor al numărului natural  $207,857+12,7\cdot 0,09$ .

20. Verificați dacă  $5 \in D_n$ , unde  $n = \frac{1}{9} + 1004$ , ( $\otimes$ ).

21. Arătați că cel mai mare pătrat perfect de două cifre se divide cu 3.

22. Trei numere naturale au suma 34056. Arătați că media lor aritmetică  $m_a$  verifică relația  $m_a \in M_4$ .

23. Tache și Lache au împreună 450 dolari. Lache are o cincime din câți dolari are Tache. Care dintre ei are o sumă de bani divizibilă cu 25?

24. Arătați că unul din divizorii numărului 123.456.789 este soluția ecuației  $5(x-9) = 5^3 - 1^5 - 2108 : 17$ .

25. Efectuați  $D_{24} \cap M_6$ .

26. Scrieți toate fracțiile subunitare al căror numărător este element al mulțimii  $M_8$ , iar numitorul element al mulțimii  $D_{16}$ .

27. Marele om politic francez Charles de Gaulle s-a născut în a doua jumătate a secolului XIX. Anul nașterii este divizibil simultan cu 5 și cu 9. În ce an s-a născut Charles de Gaulle?



28. Găsiți toate numerele naturale de forma  $\overline{3x09y}$ , care se divid în același timp cu 3 și cu 4.

29. Toto și-a uimit colegii prin abilitatea lui de a ghici numere. Le cerea să se gândească la un număr natural de două cifre, la el să adune cifra zecilor și apoi din rezultat să scadă cifra unităților (de exemplu, în cazul numărului 75, operațiile sunt  $75+7-5$ ). În final, cerea ca rezultatul să se împartă la 11 și de fiecare dată „ghicea” restul obținut. Explicați trucul.

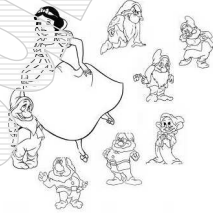
30. Dintr-un număr natural de trei cifre se scade suma cifrelor sale. Arătați că diferența rezultată se divide cu 9.

31. La cel mai mare dintre numerele  $7^{46}$  și  $4^{69}$  se adună 71. Stabiliți dacă numărul obținut este divizibil cu 5.

32. Împărțind un număr natural la 42 se obține restul 30. Dovediți că deîmpărțitul este multiplu al lui 6.

33. Arătați că numărul  $3^{23} - 27^7$  este natural și divizibil cu 8.

34. Albă ca Zăpada are trei cufere cu galbeni, numărul acestora fiind, pentru fiecare cufăr, putere a lui 2. Știind că exponenții acestor trei puteri sunt numere consecutive, arătați că Albă ca Zăpada poate împărți galbenii, în mod egal, celor 7 pitici.



35. Demonstrați că  $a \div 9$ , unde  $a = 10^{134} + 134$ .

36. Explicați de ce nu există  $n \in \mathbb{N}$  pentru care 3 să fie divizor al numărului  $202 + 4^n \cdot 25^n$ .

37. Arătați că suma  $3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{60}$  se divide cu 13.

38. Se consideră numărul  $n = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{48}$ . Arătați că:

- a)  $7 \mid n$                       b)  $8 \nmid n$                       c)  $19 \nmid n$

39. Fie numărul  $A = 5 \cdot 6^n + 2 \cdot 6^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Completați rubricile goale ale tabelului:  
b) Demonstrați că  $A \div 17$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

$n$	0	1	2
$A$	17		

40. Arătați că oricare ar fi  $x \in \mathbb{N}$ ,  $11 \mid 2^{3x+2} \cdot 9^{x+1} + 5 \cdot 8^x \cdot 3^{2x+3} - 72^x$ .