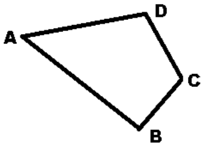
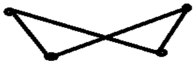
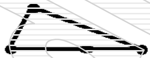
1. Patrulater convex. Suma măsurilor unghiurilor

Cuvântul „patrulater” („patru laturi”) ne face să ne gândim imediat la o linie frântă închisă, cu patru laturi, aşa cum se vede în figura alăturată:



Totuşi, vom pune două condiţii, pentru a ne asigura că „linia frântă” nu este ca în una din figurile de mai jos:



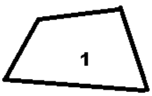


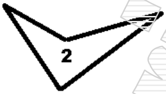
Definiţie A,B,C,D sunt patru puncte necoliniare. Numim **patrulater** ABCD figura geometrică formată din reuniunea $[AB] \cup [BC] \cup [CD] \cup [DA]$, dacă aceste patru segmente nu au alte puncte comune decât capetele lor.

Punctele A,B,C,D se numesc **vârfurile** patrulaterului ABCD, iar segmentele [AB], [BC], [CD], [DA] se numesc **laturi**. Unghiurile $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C, \sphericalangle D$ se numesc **unghiurile** patrulaterului.

Observaţie: Patrulaterul ABCD poate fi notat şi BCDA, CDAB, DCBA etc., dar nu sunt corecte notaţiile ABDC, BCAD, DCAB etc.

Iată mai jos două tipuri de patrulatere:



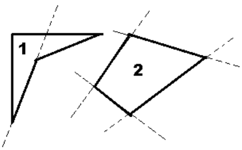


Al doilea are ceva ce ar semăna cu o „scobitură”; Pentru a face o deosebire mai clară între cele două tipuri de patrulatere, vom da următoarea definiţie:

Definiţie Numim patrulater **convex** acel patrulater care este situat în întregime de o parte a oricăreia din dreptele suport a laturilor sale.

Un patrulater care nu este convex se numeşte patrulater **concav**.

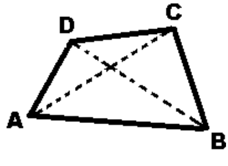
Ex. Patrulaterul „1” din figura alăturată nu este situat în întregime de o parte a dreptei trasate punctat, deci este concav. La patrulaterul „2” , se observă că este în întregime situat de o anumită parte a oricăreia din dreptele punctate, deci este convex.



Observaţii: 1. În limba latină, „convexus” înseamnă „bombat, umflat”, iar „concavus” înseamnă „scobit”.

2. Vom studia numai patrulatere convexe.

Având dat un patrulater (convex) ABCD, vom spune despre două laturi care au un vârf comun, cum ar fi [AB] şi [BC], că sunt **consecutive** (adică sunt „una



după alta”).

Despre două laturi care nu au un vârf comun, cum ar fi [AD] şi [BC], vom spune că sunt laturi **opuse**.

O pereche de unghiuri cum sunt $\sphericalangle A$ şi $\sphericalangle D$, deci care au o latură comună, se numesc unghiuri **alăturate** (laturii [AD], în acest caz). Unghiuri cum ar fi de exemplu $\sphericalangle B$ şi $\sphericalangle D$ se numesc unghiuri **opuse**.

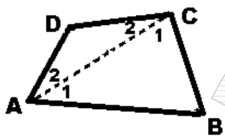
Pentru patrulaterul ABCD segmentele [AC] şi [BD] se numesc diagonale.

Prin **perimetrul** unui patrulater ABCD vom înţelege suma lungimilor laturilor: P_{ABCD}=AB+BC+CD+AD.

Avem o proprietate foarte importantă legată de unghiurile unui patrulater:

Teoremă: Unghiurile unui patrulater convex au suma măsurilor 360°.

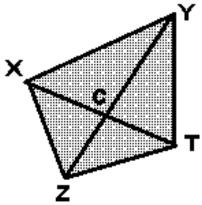
Demonstraţie



Vom trasa o diagonală, de exemplu [AC]. Suma măsurile unghiurilor patrulaterului ABCD este egală cu suma măsurilor unghiurilor celor două triunghiuri formate, Δ ABC şi Δ ADC. Dar, deoarece suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este 180°=> suma măsurilor unghiurilor patrulaterului ABCD este 180° + 180° = 360° (q.e.d.).

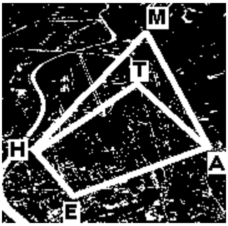
Ex. Dacă trei din măsurile unghiurilor unui patrulater sunt 70°, 50°, 140°, al patrulea unghi va avea măsura 360°–(70°+50°+140°)=360°–260°=100°.

Exerciţii şi probleme



1. În figura alăturată este desenat un patrulater XYTZ.
a) Scrieţi alte trei moduri în care poate fi notat acest patrulater; b) Care este punctul de concurenţă a diagonalelor? ; c) Explicaţi de ce ZTYC nu este patrulater; d) XYTZ este patrulater concav? Justificaţi răspunsul; e) Care sunt două laturi consecutive care îl au pe Y ca vârf comun? f) Numiţi unghiurile alăturate laturii [ZX].

2. Construiţi un patrulater convex EFGH.
a) Care este unghiul opus lui $\sphericalangle$EHG? b) Care sunt unghiurile alăturate laturii [FG]? c) Una din diagonale are un capăt G. În ce punct se intersectează această diagonală cu latura [EH]?

3. 

Analizând o fotografie făcută dintr-un avion s-au delimitat câteva zone, asa cum se vede în imaginea alăturată.

a) Precizaţi un patrulater concav din figură.

b) Două patrulatere convexe din figură au o diagonală comună. Care este aceasta?

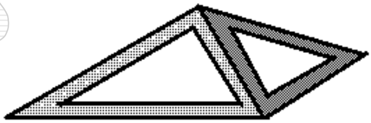
c) Dacă m(<HEA)=115°, m(<THE)=75°, m(<EAT)=65°, aflaţi m(<HTA).

4. ABDC este un patrulater convex. Completaţi tabelul de mai jos:

m(<A)	m(<B)	m(<D)	m(<C)
100°	84°	104°	
60°30’		90°15’	135°45’
	102°	102°	102°

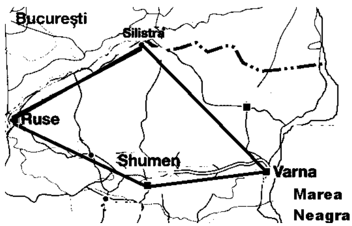
Facultativ: Accesaţi **http://www.geogebratube.org/student/m44687** şi verificaţi practic două din aceste rezultate.

5. Două echere cărora li se suprapune exact câte una din catete au fost aşezate astfel încât să formeze un patrulater. Echerul din stânga este acel tip care are o catetă jumătate din ipotenuză, iar cel din dreapta are catetele congruente. Calculaţi măsurile unghiurilor patrulaterului format.



6. În patrulaterul convex $A_1A_2A_3A_4$, $\Delta A_1A_2A_3$ este isoscel cu baza $[A_2A_3]$ şi m(<$A_2A_1A_3$)=2°, iar $\Delta A_1A_3A_4$ este echilateral. Aflaţi măsurile unghiurilor patrulaterului.

7. Localităţile din Bulgaria Silistra, Ruse, Shumen şi Varna făceau parte, în trecut, din România, pe vremea când erau cetăţi turceşti, componente ale zonei numite Cadrilater.

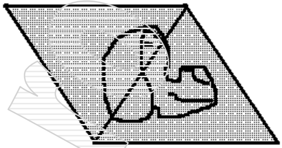


a) Calculaţi perimetrul patrulaterului care are pe hartă ca vârfuri cele patru localităţi. Luaţi ca lungimi ale laturilor 6 cm; 6 cm; 5 cm; 7 cm (distanţele sunt indicate începând din Silistra, în sens invers mişcării acelor ceasului)

b) Construiţi patrulaterul de mai sus, considerând distanţa pe hartă Ruse – Varna egală cu 10 cm (*Indicaţie*: aveţi nevoie de riglă şi compas)

Sursa hărţii: **http://www.welt-atlas.de/datenbank/karten/karte-1-104.gif**

8. Pentru realizarea unui mozaic se folosesc plăcuţe identice, având formă de triunghiuri echilaterale. Aşezând două plăcuţe ca în imagine pentru a rezulta un ornament se formează un patrulater cu perimetrul 56 cm. Cât este perimetrul fiecărei plăcuţe triunghiulare?



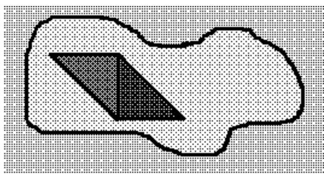
9. Măsurile unghiurilor unui patrulater convex sunt direct proporţionale cu numerele 3; 4; 6; 11. a) Arătaţi că patrulaterul are un unghi drept; b) Construiţi un astfel de patrulater.

10. Un patrulater are perimetrul 32 cm, iar lungimile laturilor sunt invers proporţionale cu numerele 0,(3); 0,25; $\frac{1}{13}$; 0,08(3). Calculaţi lungimile laturilor şi construiţi trei patrulatere care respectă datele problemei.
Facultativ: Materialul de la adresa http://www.geogebratube.org/student/m137400 vă este util pentru a fixa concluziile acestei probleme.

11. Folosind metoda reducerii la absurd, demonstraţi că un patrulater nu poate avea toate unghiurile ascuţite.

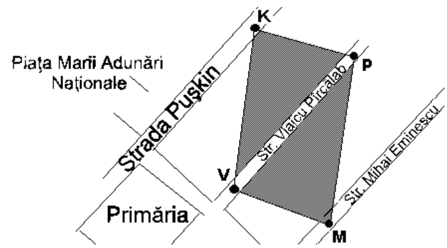
12. Care este numărul maxim de unghiuri obtuze ale unui patrulater?

13. Într-un parc există un teren de joacă pentru copii, în formă de patrulater, ca în desenul alăturat. Dacă se trasează una din diagonale, se formează două triunghiuri dreptunghice isoscele congruente, având lungimile catetelor 14 m.



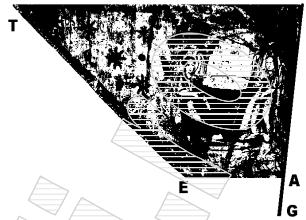
Calculaţi aria terenului de joacă. Exprimaţi rezultatul în m^2 şi în ari.

14. În Cişinău se află trei străzi paralele, cea din mijloc fiind egal depărtată de celelalte două: Puşkin, Vasile Pârcălab şi Mihai Eminescu. Delimităm patrulaterul VMPK, având vârfurile V şi P pe strada din mijloc şi câte unul pe fiecare din celelalte. Ştim că VP=240 m şi A_{VMPK}=3,6 ha. Lăţimea celor trei străzi se neglijează.



a) Aflaţi la ce distanţă se află străzile una de alta b) De ce aria lui VMPK nu depinde de poziţia punctelor M şi K pe străzile pe care se află?
(**Sursa hărţii** http://upload.wikimedia.org/wikipedia/ro/archive/6/6d/20090410170011!Chisinau_centru.png)

15. La Muzeul Brukenthal din Sibiu se află un steag de breaslă datând din sec. XVIII, având forma unui patrulater STEA. Pe lance am mai notat un punct oarecare G.



a) Arătaţi că dacă unghiurile $\sphericalangle TSA$ şi $\sphericalangle EAS$ sunt suplementare, atunci laturile EA şi TS sunt paralele.

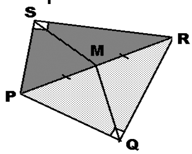
b) Scrieţi reciproca teoremei de mai sus şi cercetaţi dacă este adevărată. (Sursa imaginii: http://clasate.cimec.ro/medium/IST_6966500_686-9.jpg)

16. Diagonalele patrulaterului ABCD sunt concurente în O. [BO] este mediană în Δ ABC, iar [CO] este mediană în Δ BCD. Arătaţi că $AD \parallel BC$.

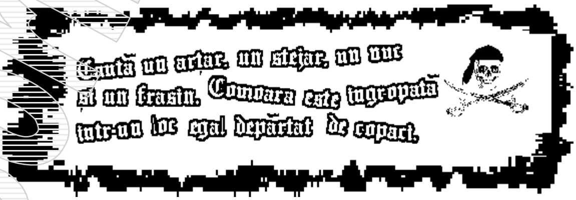
17. Demonstraţi că dacă bisectoarele a trei din unghiurile unui patrulater sunt concurente într-un punct L, atunci şi bisectoarea celui de al patrulea unghi trece prin L.

18. Mediatoarele a trei din laturile unui patrulater sunt concurente într-un punct O. Arătaţi că O aparţine mediatoarei celei de a patra laturi.

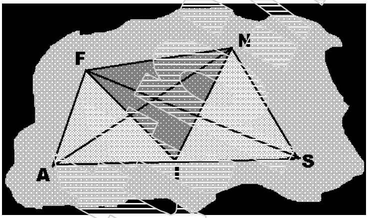
19. În patrulaterul PQRS, unghiurile $\sphericalangle S$ şi $\sphericalangle Q$ sunt drepte. Notăm M mijlocul lui [PR]. Demonstraţi că $m(\sphericalangle SMQ) = 2 \cdot m(\sphericalangle SRQ)$.



20. Nişte aventurieri au ajuns pe o insulă pustie. Într-o peşteră au găsit un mesaj rămas de la piraţii care bântuiau mai demult prin zonă. Conţinutul



mesajului este cel din imaginea de mai sus. Aventurierii au întocmit o hartă a insulei. Au găsit arţarul A, stejarul S, nucul N şi frasinul F. La jumătatea distanţei dintre arţar şi stejar se găsea un izvor I. Făcând apoi nişte măsurători au găsit că m(<FSA)=20°, m(<NAS)=30°, m(<FAN)=m(<FSN)= =40°.



a) Demonstraţi că $AF \perp SF$; b) Stabiliţi natura Δ FIN; c) Negăsind comoara după aceste eforturi, aventurierii au făcut un popas la izvor şi au plecat spre casă, lăsându-se păgubaşi. Unde ar putea să fie îngropată comoara?