OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
22 februarie 2014

CLASA a V-a

1. Calculați diferența dintre suma numerelor naturale de trei cifre identice și suma numerelor naturale de două cifre identice.

Manual clasa a V-a

2. Determinați valorile naturale ale lui *n* și cifra nenulă *x* pentru care

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^{n} = \overline{xxxx}$$

G.M.

3. Arătați că suma tuturor numerelor naturale nenule care, împărțite la 51 dau câtul egal cu dublul restului, nu este pătrat perfect.

Daniela Tilincă, Adriana Mihăilă

4. a) Diferența a două numere este 714. Unul dintre numere este 2341. Calculați suma celor două numere. Câte soluții are problema?

   b) Produsul a două numere este 646. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul este 986. Aflați cele două numere.

Cătălin Mîinescu

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 2 ore .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
22 februarie 2014

CLASA a VI-a

1. Câte numere naturale mai mici decât 150 împărțite la 20 dau restul 7 ?

Manual clasa a VI-a

2. Fie *A* un număr natural scris în baza 10, care are 2013 cifre, dintre care una este 1, iar celelalte sunt egale cu 2. Arătați că numărul nu este prim.

Ioan Crăciun, Gheorghe Crăciun

3. a) Rezolvați în N ecuația $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+2012}{2013}=2012$

b) $\measuredangle AOB$ și $\measuredangle BOC$ sunt adiacente suplimentare, (*OX* și (*OY* sunt respectiv bisectoarele lor. Dacă $m(\measuredangle BOY)=\frac{1}{4}m(\measuredangle COX)$, aflați $m(\measuredangle AOB)$.

Locală Vaslui

4. Se consideră dreptele *AB* și *CD* concurente în *O*, astfel încât

$m(\measuredangle AOC)=\frac{2}{7}m(\measuredangle BOC)$, iar punctul *E* în același semiplan cu *D* față de dreapta *AB*, astfel încât $m(\measuredangle DOE)=90^{\circ}$. Dacă [*OF* este bisectoarea $\measuredangle AOE$ și [*OH* este semidreapta opusă semidreptei [*OF,* determinați măsura $\measuredangle BOH$.

Monica Guita

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 2 ore .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

1. Fie numărul $E = \frac{(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n}{(-1)^n+(-1)^{n^2}+(-1)^{n^3}+\ldots+(-1)^{n^n}}$, $n\in$ N. Arătați că E=0 sau E=$\frac{1}{n}$.

Manual clasa a VII-a

2. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$3x^2 - 2xy - y - 1 = 0$$

G.M.

3. Se consideră pătratul *ABCD* de centru *O*. Pe dreapta *AB* se consideră un punct *E*, astfel încât $B\in(AE)$ și m ($\measuredangle$ *OEB*) = 30°. Perpendiculara în *O* pe *OE* intersectează dreapta *BC* în *F*. Arătați că:
   a) $\triangle EOF$ este isoscel.
   b) $[OE] \equiv [AB]$

Locală Maramureş

4. Un trapez *ABCD* cu m($\measuredangle A$) = 90°, $AB \parallel CD$ și $CD < AD < BC < AB$ are perimetrul de 18 cm, iar lungimile laturilor sale sunt exprimate prin 4 numere naturale consecutive.

   a) Să se afle aria trapezului *ABCD*.
   b) Calculați distanța de la punctul *A* la dreapta *BC*.
   c) Dacă $AD \cap BC = \{P\}$, *M* mijlocul laturii (*AB*) și $PM \cap AC = \{S\}$, determinați raportul ariilor triunghiurilor *ASM* și *ASP*.

Ana Gal

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 3 ore .

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală
22 februarie 2014

CLASA a VIII-a

1. a) Arătați că dacă $a > 0$, $b > 0$, atunci $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2$.

   b) Arătați că $\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{7}{\sqrt{12}} + \frac{9}{\sqrt{20}} + \cdots + \frac{49}{\sqrt{600}} > 48$.

Manual clasa a VIII-a

2. Arătați că numărul $a = 3^{2013} + 4^{2013} + 5^{2013}$ este divizibil cu 72.

G.M.

3. Arătați că dacă $3a^2 + 3b^2 - 2a - 14b + \frac{46}{3} = 0$, unde a, b $\in \mathbb{R}$, atunci $\frac{4}{3} \leq a + b \leq 4$.

Locală Dolj

4. În rombul $ABCD$ sunt date $AB = 10$ cm, $m(\measuredangle BAD) = 60^\circ$, $AC \cap BD = \{O\}$, M și N mijloacele laturilor AB respectiv AD. Deasupra planului rombului construim piramidele triunghiulare regulate $PAMN$ și $RBCD$ cu vârfurile P și R, astfel încât $[PA] \equiv [AM]$ și $[RB] \equiv [BC]$.

   a) Să se calculeze lungimea segmentului $[PR]$.

   b) Dacă $AP \cap CR = \{S\}$, să se demonstreze că $SO \perp (ABC)$.

Locală Harghita

Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte .
Timp de lucru 3 ore .

Barem de corectare OLM clasa a V-a, 2014

1) Scrierea sumei S_1=111+222+...+888+999 .... 1 p
   Calcularea sumei S_1=4995 .... 2 p
   Scrierea sumei S_2=11+22+...+88+99 .... 1p
   Calcularea sumei S_2= 495 .... 1 p
   Scrierea diferenţei D=4995-495 .... 1 p
   Calcularea diferenţei D=4500 .... 1 p

2) Scrierea $3^n.3^6+3^n.3^5+3^n.3^4+2.3^n.3^3+4.3^n$ .... 1 p
   Obţinerea $3^n.1111$ .... 1 p
   Scrierea x.1111 .... 1 p
   Obţinerea $3^n=x$ .... 1 p
   Soluţia n=0 şi x=1 .... 1 p
   Soluţia n=1 şi x=3 .... 1 p
   Soluţia n=2 şi x=9 ....1 p

3) Scrierea teoremei împărţirii cu rest .... 1 p
   Obţinerea d=103x, x rest, x<51 .... 2 p
   Calcularea sumei S=103+103.2+...+103.50 .... 2 p
   Explicarea faptului că S=25.3.17.103 nu este pătrat perfect .... 2 p

4) a) I) Descăzutul este 2341 şi determinarea scăzătorului 1627.. 1 p
   Determinarea sumei S_1 =3968 .... 1 p
   II) Scăzătorul este 2341 şi determinarea descăzutului 3055 .... 1 p
   Determinarea sumei S_2=5396 .... 1 p
   b) Scrierea produselor x.y=646 şi (x+10)y=986 .... 1 p
   Determinarea numărului y=34 .... 1 p
   Determinarea numărului x=19 .... 1 p

Barem de corectare OLM clasa a VI-a

22.02.2014

1). $n \le 149$, $n = 20q + 7$..2p

rezolva inecuatia $20q + 7 \le 149$..2p

$q \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$..2p

sunt 8 numere..1p

2). daca 1 nu este ultima cifra a lui A, atunci $A \vdots 2$..2p

daca $A = \underbrace{222...221}_{2013 \text{ cifre}} = 222222 \cdot 10^{2007} + 222222 \cdot 10^{2001} + ... + 222222 \cdot 10^{3} + 221$.............2p

dar $222222 \vdots 13$ si $221 \vdots 13$, deci $A \vdots 13$..2p

finalizare A nu este prim..1p

3). a). $x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013}\right) + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ... + \frac{2012}{2013} = \underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{\text{de } 2012 \text{ ori}}$..1p

$x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2013}$..1p

$x = 1$..1p

b). figura..1p

$m\measuredangle AOB = 2a$, $m\measuredangle BOC = 2b$, $2a + 2b = 180^\circ$, $a + b = 90^\circ$..1p

$m\measuredangle BOY = b$, $m\measuredangle COX = a + 2b$, $4b = a + 2b$, $a = 2b$..1p

$a = 60^\circ$, $m\measuredangle AOB = 120^\circ$..1p

4). figura..1p

$m\measuredangle AOC = \frac{2}{7} m\measuredangle BOC$, suplementare $\Rightarrow m\measuredangle AOC = 40^\circ$, $m\measuredangle BOC = 140^\circ$..........................2p

$m\measuredangle AOD = 140^\circ$, $m\measuredangle DOE = 90^\circ \Rightarrow m\measuredangle AOE = 50^\circ$..1p

$[OF$ bisectoare $\measuredangle AOE \Rightarrow m\measuredangle AOF = 25^\circ$..1p

$\measuredangle AOF \equiv \measuredangle BOH$ opuse la varf..1p

$m\measuredangle BOH = 25^\circ$..1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

FAZA LOCALĂ

22.02.2014

CLASA a VII-a

BAREM

SUBIECTUL I

Tratează cazul n număr par şi ajunge la E=0……………………………………………………3p

Tratează cazul n număr impar şi ajunge la E= $\frac{1}{n}$…………………………………………………4p

SUBIECTUL II

Dacă ajunge la y=$\frac{3x^2-1}{2x+1}$…………………………………………………………………..1p

Găseşte 2x+1 | 1……………………………………………………………………………….4p

Finalizează $(x;y)\in\{(0;-1); (-1;-2)\}$……………………………………………………….2p

SUBIECTUL III

Desen………………………………………………………………………………………1p

a) Demonstrează $\Delta BOE \equiv \Delta COF$……………………………………………………4p

b) Arată că OM=$\frac{AB}{2}$……………………………………………………………………….1p

Arată că OM=$\frac{OE}{2}$ şi finalizează……………………………………………………………1p

SUBIECTUL IV

Desen………………………………………………………………………………………1p

a) Găseşte CD=3cm, AD=4cm, BC=5cm, AB=6cm…………………………………………….1p

Calculează aria lui ABCD, $18cm^2$…………………………………………………………..1p

b) Calculează distanța de la A la BC de $\frac{24}{5}$cm…………………………………………………2p

c) Găseşte raportul ariilor $\frac{1}{2}$ ……………………………………………………………...2p

Barem de corectare OLM clasa a VIII-a, 2014

1. a) $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} \geq 2 \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ 3p

b) observa ca termenii sumei sunt de forma $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}$ 1p

aplic inegalitatea de la punctul a) pentru

a=1, b=2 $\frac{3}{\sqrt{2}} \geq 2$

....

a=24, b=25 $\frac{49}{\sqrt{600}} \geq 2$ 2p

insumand inegalitatile de mai sus, obtinem inegalitatea cerita 1p

2. scrie 72=8·9, si stabileste ca cmmdc (8;9)=1..1p

stabileste ca: 72 | a e necesar ca 8 | a si 9 | a..1p

cunoaste formula $x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)\left(x^{2k}-x^{2k-1}y+x^{2k-2}y^2-...+y^{2k}\right)$ 1p

aplica identitatea de mai sus si obtine

$3^{2013}+5^{2013}=(3+5)\cdot\left(3^{2012}-3^{2011}\cdot 5+...+5^{2012}\right)\vdots 8$

cum $4^{2013}\vdots 8$ obtinem ca $a \vdots 8$..2p

$4^{2013}+5^{2013}=(4+5)\cdot\left(4^{2012}-4^{2011}\cdot 5+...+5^{2012}\right)\vdots 9$

cum $3^{2013}\vdots 9$ obtinem ca $a \vdots 9$..2p

3. Relatia din enunt poate fi scisa sub forma $(3a-1)^2+(3b-7)^2=4$ 3p

e necesar ca $(3a-1)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq 3a-1 \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq a \leq 1$

$(3b-7)^2 \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq 3b-7 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq b \leq 3$ 3p

insumand ultimele doua inegalitati primite obtinem $\frac{4}{3} \leq a+b \leq 4$ 1p

4. constructia unei figuri conforme cu datele problemei 1p

a) demonstreaza ca PAMN si RBCD sunt tetraedre regulate si determina lungimile segmentelor necesare 1p

demonstreaza ca patrulaterul determinat de P,R si centrele bazelor tetraedrelor e trapez dreptunghic. 1p

determina lungimea segmentului [PR].. 1p

b) demonstreza ca triunghiul SAC este isoscel 1p

demonstreaza ca SO $\perp$ (ABC)... 2p