Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a V-a

Problema 1. Elena are de citit o carte. După ce citeşte trei optimi din numărul paginilor cărţii, constată că a citit cu 10 pagini mai mult decât o treime din numărul total de pagini ale cărţii.

a) Câte pagini are cartea?

b) Câte pagini a citit Elena?

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 2. Fie p un număr natural impar care nu se divide cu 5. Să se demonstreze că numărul $p^{2\cdot n\cdot(n+1)}-1$ este divizibil cu 10, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Manea Maricel, profesor, Munteni

Problema 3. Se dă numărul $a=2^{2014}-2^{2008}-2^{2007}$.

a) Să se determine ultimele patru cifre ale numărului a.

b) Să se determine cel mai mic număr natural nenul b astfel încât numărul $a\cdot b$ să fie, în acelaşi timp, pătrat perfect şi cub perfect.

Milu Cârmaciu, profesor, Galați

Problema 4. Numărul natural $\overline{abcd}$ are suma cifrelor egală cu 27. Să se demonstreze că numărul $\overline{abcd}+\overline{dcba}$ se divide cu 297.

G.M. nr. 11/ 2013

Problemă selectată de Vasile Popa, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VI-a

Problema 1..

a) Să se calculeze:

$$\left[2{,}1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)\right]\cdot\left(2-\frac{4}{5}\right)^2-9\cdot 2014^0$$

b) Să se determine numerele naturale a şi b, pentru care sunt satisfăcute relaţiile: $(a,b)=15$ şi $a+b=240$.

Mirela Grigore, profesor, Galaţi

Problema 2.

Se consideră triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, iar M şi N două puncte pe dreapta BC astfel încât B să fie între M şi C, iar C între B şi N. Ştiind că $AM=AN$, să se demonstreze că:

a) $BM=CN$

b) $PN=QM$, unde P şi Q sunt respectiv mijloacele laturilor $[AB],[AC]$

c) $PM=QN$

d) Dacă $MQ\cap NP=\{O\}$, să se arate că punctul O aparţine bisectoarei unghiului MAN.

Maricel Manea, profesor, Munteni

Problema 3

Fie numerele raţionale:

$$A=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{2013}}+\frac{1}{2^{2014}}\right)\cdot\left(1+1+2+2^2+\ldots+2^{2013}\right) \text{ şi}$$

$$B=\frac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+\ldots+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+\ldots+2^{2014}}-2$$

Să se calculeze $B+A-2^{2015}$.

Veronica Grigore, profesor, Galaţi

Problema 4

Determinaţi numerele prime p pentru care $p+2, p^2+4, p^3+2$ şi p^4-2 sunt simultan numere prime.

GM. Nr. 4/2013

Problemă selectată de Mirela Grigore, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VII-a

Problema 1. Să se determine numerele întregi a, b, c care verifică egalitatea

$|ab+5-c|+|bc+1-a|+|ac+1-b|=0.$

Maricel Manea, profesor, Munteni

Problema 2. Se consideră paralelogramul ABCD şi $E\in(CD)$.

Dacă $AE\cap BC=\{F\}$ şi BE $\cap$ AD=$\{G\}$, să se demonstreze că AD $\le \frac{DG+CF}{2}$.

G.M. nr. 11/2013

Problemă selectată de Dorina Andrei Nicoară, profesor, Galați

Problema 3.

In paralelogramul ABCD, $AC\cap BD=\{O\}$, $M\in[BC]$, $[BM]\equiv[MC]$, $ON\parallel DM$, $N\in[AD]$.

Să se calculeze raportul $\frac{AN}{ND}$.

Problemă selectată de Constantina Mihăilă, profesor, Galați

Problema 4.

a) Să se calculeze $\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Să se determine numărul natural nenul n din egalitatea

$$2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n+1)}\right)=1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2013}.$$

Problemă selectată de Carmen Necula, profesor, Galați

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VIII-a

Problema 1. Să se determine intervalul $[a,b]\subset\mathbb{R}$, ştiind că este îndeplinită condiţia

$$|a-b-2|-a^2=\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{3}.$$

Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați

Problema 2. Tetraedrul VABC are baza triunghiul echilateral ABC, iar vârful V se proiectează în interiorul triunghiului ABC. Se notează cu a, b, c ariile feţelor laterale VBC, VAC, respectiv VAB. Să se demonstreze că dacă are loc egalitatea

$\left|a^2\cdot(b-c)+b^2\cdot(c-a)+c^2\cdot(a-b)\right|=\frac{2014}{2013}\cdot\left|(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\right|$, atunci proiecţia punctului V pe planul bazei aparţine unei bisectoare a triunghiului ABC.

Tătaru Radu-Marius, profesor, Galați

Problema 3. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $a\cdot b\cdot c=1$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\le\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

G.M. nr. 9/2013

Problemă selectată de Vasile Popa, profesor, Galați

Problema 4. Fie romburile $ABCD$, $ABEF$, $ADGF$ astfel încât

$m(\sphericalangle BAD)=60^\circ, m(\sphericalangle BAF)=60^\circ, m(\sphericalangle FAD)=60^\circ$ şi $AB=a$. Fie punctul $M\in(FGE)$. Să se calculeze:

a) distanţa de la punctul M la planul (BCD).

b) $\frac{EN+PF}{NP}$ ştiind că $N\in(AB)$, $P\in(AD)$ astfel încât suma $EN+NP+PF$ să fie minimă.

Bătrâneţu Petre, profesor, Galaţi

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a V-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
1.	a) Metoda figurativă: Numărul paginilor îl reprezentăm printr-un segment de dreaptă pe care îl împărţim în 8 părți egale. Trei optimi din numărul total de pagini mai puțin 10 pagini reprezintă o treime din numărul total de pagini. Următoarele trei optimi din numărul total de pagini mai puțin 10 pagini reprezintă tot o treime din numărul total de pagini.	**1p**
	Ultimele două optimi din numărul total de pagini plus cele 20 pagini reprezintă a treia treime din numărul total de pagini.	**1p**
	Atunci trei optimi din numărul total de pagini mai puţin 10 pagini, sunt egale cu două optimi din numărul total de pagini plus cele 20 pagini.	**1p**
	Aşadar, o optime din numărul total de pagini reprezintă 30 pagini. Cartea are 240 pagini.	**2p**
	Elena a citit 90 pagini.	**2p**
2.	$n\cdot(n+1)\vdots 2,\ (\forall)n\in\mathbb{N}$, (produs de numere naturale consecutive) $\Rightarrow$ $2\cdot n\cdot(n+1)\vdots 4$;	**2p** **1p**
	p număr impar, p nu se divide cu 5 $\Rightarrow u(p)\in\{1,3,7,9\}\Rightarrow$	**2p**
	$u\left(p^{2\cdot n\cdot(n+1)}\right)=1\Rightarrow u\left(p^{2\cdot n\cdot(n+1)}-1\right)=0\Rightarrow\left(p^{2\cdot n\cdot(n+1)}-1\right)\vdots 10.$	**2p**
3.	a) $a=2^{2014}-2^{2008}-2^{2007}=2^{2007}\cdot\left(2^7-2^1-1\right)=2^{2007}\cdot 125$ $=2^{2004}\cdot 2^3\cdot 125=2^{2004}\cdot 1000.$ Rezultă că ultimele 3 cifre ale numărului a sunt zerouri.	**2p**

	Cea de-a patra cifră de la sfârşit este ultima cifră a numărului 2^{2004} care este 6. Deci ultimele patru cifre ale numărului a sunt 6,0,0,0.	**2p**
	Numărul $a\cdot b$ *este* pătrat perfect dacă se scrie ca o putere cu exponentul multiplul lui 2, iar $a\cdot b$ este cub perfect dacă se scrie ca o putere cu exponentul multiplul lui 3; $a=2^{2007}\cdot 5^3$;	**2p**
	Exponenţii puterilor din numărul a sunt divizibili cu 3, dar nu se divid cu 2. Atunci, pentru ca numărul b să fie cel mai mic număr astfel încât $a\cdot b$ să fie atât pătrat perfect cât şi cub perfect $\Rightarrow$ $b=2^3\cdot 5^3$; $a\cdot b=2^{2007}\cdot 5^3\cdot 2^3\cdot 5^3=2^{2010}\cdot 5^6=\left(2^{335}\right)^6\cdot 5^6=\left(2^{1005}\cdot 5^3\right)^2=\left(2^{670}\cdot 5^2\right)^3$.	**1p**
4.	$A=\overline{abcd}+\overline{dcba}=1001\cdot(a+d)+110\cdot(b+c)=$ $11\cdot 91(a+d)+11\cdot 10(b+c)\Rightarrow A\vdots 11 \quad (1)$	**3p**
	Dar $A=891\cdot(a+d)+110\cdot(a+b+c+d)=27\cdot 33\cdot(a+d)+110\cdot(a+b+c+d)=$ $27\cdot 33\cdot(a+d)+110\cdot 27=27\cdot\left[33\cdot(a+d)+110\right]\Rightarrow A\vdots 27 \quad (2)$	**3p**
	$\left.\begin{array}{l}(11,27)=1\\ A\vdots 11\\ A\vdots 27\end{array}\right\}\Rightarrow A\vdots 297.$	**1p**

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VI-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.a	Transformările fracţiilor zecimale în fracţii ordinare: $2,1(6)=2\frac{15}{90}=2\frac{1}{6}=\frac{13}{6}$ şi $0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	1p
1.a	$2,1(6)+1\frac{1}{2}:0,(3)=\frac{13}{6}+\frac{3}{2}:\frac{1}{3}=\frac{40}{6}$	1p
1.a	$\left(2-\frac{4}{5}\right)^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$	1p
1.a	Finalizare: $\frac{40}{6}\cdot\frac{36}{25}-9\cdot 1=\frac{3}{5}$	1p
1.b	$(a,b)=15\Rightarrow$ există $x,y\in\mathbb{N}$ astfel încât $a=15\cdot x,\ b=15\cdot y,\ (x,y)=1$ Din $a+b=240$ obţinem $15\cdot x+15\cdot y=240$	1p
1.b	$x+y=16,\ (x,y)=1\Rightarrow$ $(x,y)\in\{(1,15),(15,1),(3,13),(13,3),(5,11),(11,5),(7,9),(9,7)\}$	1p
1.b	$(a,b)\in\{(15,225),(225,15),(45,195),(195,45),(75,165),(165,75)\}\cup$ $\cup\{(105,135),(135,105)\}$	1p
	a) Din $\Delta ABC\ isoscel\Rightarrow\sphericalangle ABC\equiv\sphericalangle ACB\Rightarrow\sphericalangle ABM\equiv\sphericalangle ACN$ $\Delta AMN\ isoscel\Rightarrow\sphericalangle AMB\equiv\sphericalangle ANC$ Conform cazului LUU $\Rightarrow\Delta AMB\equiv\Delta ANC\Rightarrow MB=NC$; $\sphericalangle MAB\equiv\sphericalangle NAC$	2p
	b) Conform cazului LUL $\Rightarrow\Delta PNB\equiv\Delta QMC\Rightarrow PN=QM$; $\sphericalangle PNB\equiv\sphericalangle QMC$	2p

2	**c)** Conform cazului LUL $\Rightarrow \Delta MBP \equiv \Delta NCQ \Rightarrow MP = NQ$	2p
	d) $\sphericalangle PNB \equiv \sphericalangle QMC \Rightarrow \Delta MON\ isoscel \Rightarrow MO = NO$ Dar $OP = PN - ON$; $OQ = MQ - OM \Rightarrow OP = OQ$ Conform cazului LLL $\Rightarrow \Delta AOP \equiv \Delta AOQ \Rightarrow \sphericalangle PAO \equiv \sphericalangle QAO$ Dar şi $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC \Rightarrow \sphericalangle MAO \equiv \sphericalangle NAO$	1p

Nr. problemei	**Soluţie, rezolvare**	**Punctaj**
3	Calculăm a doua paranteză din A: $1+1+2+2^2+...+2^{2013} = (2+2)+2^2+...+2^{2013} = \left(2^2+2^2\right)+2^3+...+2^{2013} =$ $= ... = 2^{2013}+2^{2013} = 2^{2014}$	2p
	Aducând în prima paranteză la acelaşi numitor avem: $A = \dfrac{2^{2014}+2^{2013}+...+2+1}{2^{2014}} \cdot 2^{2014} =$ $= 2^{2015}-1$	2p
	$B = \dfrac{2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1}{1+2^2+2^4+...+2^{2014}} - 2;$ Fie S=$2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2+1$ Atunci $2 \cdot$S=$2^{2016}+2^{2015}+2^{2014}+2^{2013}+...+2^3+2^2+2 \Rightarrow$ $2 \cdot$S=$2^{2016}+S+1 \Rightarrow S = 2^{2016}-1\ (1)$ Fie T=$1+2^2+2^4+...+2^{2014}$ Atunci 4T=$2^2+2^4+...+2^{2014}+2^{2016} \Rightarrow$ $4T = 2^{2016}+T-1 \Rightarrow 3T = 2^{2016}-1 \Rightarrow T = \dfrac{2^{2016}-1}{3}\ (2)$ $B = \dfrac{2^{2016}-1}{\frac{2^{2016}-1}{3}} - 2 = 3-2 = 1;$	2p
	Finalizare: $B + A - 2^{2015} = 0.$	1p
	Pentru $p = 2$ avem $p+2 = 4$, care nu este număr prim.	

4	Pentru $p=3$ avem numerele 5, 13, 29 şi 79, care sunt, toate, numere prime.	2p
	Pentru $p=5$ avem numărul $p^4-2=623$, care se divide cu 7.	1p
	Demonstrăm că pentru $p>5$, număr prim, nu toate cele patru numere sunt prime. Dacă $p>5$, atunci $p=5\cdot k+1,\ p=5\cdot k+2,\ p=5\cdot k+3$ sau $p=5\cdot k+4,\ k\geq 1$ ($p=5\cdot k,\ k>1$, nu sunt numere prime). Dacă $p=5\cdot k+1$, atunci $p^2+4=(5\cdot k+1)^2+4=\mathrm{M}_5+1+4=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+2$, atunci $p^3+2=(5\cdot k+2)^3+2=\mathrm{M}_5+2^3+2=\mathrm{M}_5+10=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+3$, atunci $p+2=5\cdot k+3+2=\mathrm{M}_5+5=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim.	1p
	Dacă $p=5\cdot k+4$,atunci $p^2+4=(5\cdot k+4)^2+4=\mathrm{M}_5+4^2+4=\mathrm{M}_5+20=\mathrm{M}_5$ care nu este număr prim. Singura soluţie este $p=3$.	1p

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie 2014

Clasa a VII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	$\left.\begin{array}{l} \lvert ab+5-c\rvert+\lvert bc+1-a\rvert+\lvert ac+1-b\rvert=0 \\ \lvert ab+5-c\rvert\geq 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \\ \lvert bc+1-a\rvert\geq 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \\ \lvert ac+1-b\rvert\geq 0,\ (A),(\forall)a,b,c\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} ab+5-c=0 \\ bc+1-a=0 \\ ac+1-b=0 \end{cases};$	**2p**
	$\begin{cases} bc+1-a=0 \\ ac+1-b=0 \end{cases} \Rightarrow c\cdot(b-a)+b-a=0 \Leftrightarrow (b-a)\cdot(c+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ sau \\ c=-1 \end{cases}$	**2p**
	1. Dacă $c=-1$ atunci $\begin{cases} a\cdot b=-6 \\ a+b=1 \\ a,b\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} sau \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases};$ $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases} sau \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$ *convin.*	**2p**
	2. Dacă $a=b$ atunci relaţia a doua devine $ac+1\text{-}a=0 \Rightarrow a\cdot(1-c)=1;$ $\left.\begin{array}{l} a\cdot(1\text{-}c)=1 \\ a,b\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=1=b \\ c=0 \end{cases} sau \begin{cases} c=2 \\ a=-1=b \end{cases}$ Aceste valori nu verifică relaţia $ab+5-c=0 \Rightarrow$ nu convin. Soluţiile sunt $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=-1 \end{cases};\ \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$	**1p**

2.	$CF \parallel AD \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \triangle CFE \sim \triangle DAE \Rightarrow \frac{CF}{AD}=\frac{CE}{DE}=\frac{EF}{AE}$ $GD \parallel BC \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \triangle GDE \sim \triangle BCE \Rightarrow \frac{GD}{BC}=\frac{DE}{CE}=\frac{GE}{BE}$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l}\frac{CF}{AD}=\frac{CE}{DE}\\ \frac{GD}{BC}=\frac{DE}{CE}\end{array}\right\} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \frac{CF}{AD}\cdot\frac{GD}{BC}=1 \Rightarrow AD^2=DG\cdot CF \Rightarrow$	**3p**
	$AD=\sqrt{DG\cdot CF}\le\frac{DG+CF}{2}.$	**2p**
3.	*Fie* $ON \cap BC=\{P\}$; $[OP]$ este linie mijlocie în triunghiul BDM $\Rightarrow$ punctul P este mijlocul $[BM]$	**2p**
	$\left.\begin{array}{l}DM \parallel NP\\ DN \parallel MP\end{array}\right\} \Rightarrow DMPN$ paralelogram $\Rightarrow [\mathrm{DN}]\equiv[MP]$;	**3p**
	$AN=AD-ND=BC-BP=CP; \frac{AN}{ND}=\frac{CP}{MP}=3.$	**2p**
4.	$\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}.$	**2p**
	$2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n+1)}\right)=1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot2013}$ (1) $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{1\cdot3}=1-\frac{1}{1\cdot3}\\ \frac{4}{1\cdot3\cdot5}=\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5}\\ \frac{6}{1\cdot3\cdot5\cdot7}=\frac{1}{1\cdot3\cdot5}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot7}\\ .\\ .\\ .\\ \frac{2n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n+1)}=\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n-1)}-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n+1)}\end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$	**3p**
	$2\cdot\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\ldots+\frac{n}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2\cdot n+1)}\right)=1-\frac{1}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$ (2) Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ 2n+1=2013 $\Rightarrow$ n=1006.	**2p**

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

23 februarie-2014

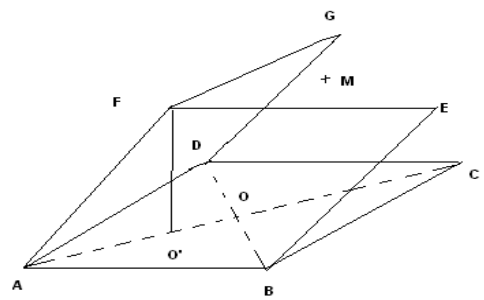
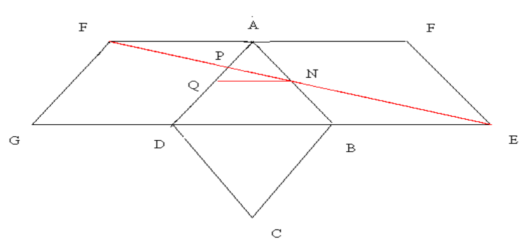
Clasa a VIII-a

Barem de evaluare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

Nr. problemei	Soluţie, rezolvare	Punctaj
1.	Din existenţa $[a,b]\subset\mathbb{R}\Rightarrow a\le b\Rightarrow a-b\le 0\Rightarrow$ $a-b-2<0\Rightarrow\lvert a-b-2\rvert=b-a+2;$	**2p**
	$\lvert a-b-2\rvert-a^2=\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\Rightarrow b-a+2-a^2=\left(b-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{3}\Leftrightarrow$ $a^2+a+b^2-\frac{4}{3}b+\frac{25}{36}=0\Leftrightarrow$	**2p**
	$a^2+a+\frac{1}{4}+b^2-\frac{4}{3}b+\frac{4}{9}=0\Leftrightarrow\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{2}{3}\right)^2=0\Rightarrow$ $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow[a,b]=\left[-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$	**3p**
2.	$\lvert a^2\cdot(b-c)+b^2\cdot(c-a)+c^2\cdot(a-b)\rvert=\frac{2014}{2013}\cdot\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\rvert\Leftrightarrow$ $\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(a-c)\rvert=\frac{2014}{2013}\cdot\lvert(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)\rvert\Rightarrow$	**3p**
	$a=b$ sau $b=c$ sau $a=c$; Dacă $a=b\Rightarrow A_{\triangle VBC}=A_{\triangle VAC}$; $\begin{cases}[BC]\equiv[AC]\\ A_{\triangle VBC}=A_{\triangle VAC}\end{cases}\Rightarrow d(V,BC)=d(V,AC)$; Fie $VM\perp BC$, $M\in(BC)$; $VN\perp AC, N\in(AC)$; Asadar $[VM]\equiv[VN]$	**2p**

	Fie $\mathrm{pr}_{(ABC)}V=O\Rightarrow VO\perp(ABC)$ $\left.\begin{array}{l} VO\perp(ABC)\\ VM\perp BC\\ BC\subset(ABC)\end{array}\right\}\overset{R_1.T.3\perp}{\Rightarrow} OM\perp BC;$ Analog $ON\perp AC$ $\left.\begin{array}{l} d(V,BC)=d(V,AC)\\ \mathrm{pr}_{(ABC)}V=O\end{array}\right\}\Rightarrow d(O,BC)=d(O,AC)\Rightarrow O\in$ bisectoarei $\measuredangle ACB$ Analog se demonstrează în cazul b=c sau a=c.	**2p**
	Folosim inegalitatea mediilor: $\frac{a+b}{2}\geq\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\Leftrightarrow\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right),(\forall)a,\ b\in\mathbb{R}_+^*$	**2p**
3.	Analog $\frac{1}{c+b}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right);\ \frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right);$ Adunând cele trei inegalităţi, obţinem: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right);$ Dar $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+ac+bc}{abc}=ab+ac+cb;$	**2p**
	Să demonstrăm că $ab+ac+cb\leq a^2+b^2+c^2;$ Demonstraţie: $ab+ac+cb\leq a^2+b^2+c^2\Leftrightarrow 2\cdot(ab+ac+cb)\leq 2\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow$ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0(A),\left(\forall a,b,c\in\mathbb{R}_+^*\right);$	**2p**
	Atunci $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\leq\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right),$ ceea ce trebuia demonstrat.	**1p**

<table>
<tr>
<td rowspan="3">4.</td>
<td>Figura este următoarea:

</td>
<td>1p</td>
</tr>
<tr>
<td>Din
$$\left.\begin{array}{l} EF \parallel AB \\ FG \parallel AD \\ EF \cap FG = \{F\} \\ AB \cap AD = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow (FGE) \parallel (ABCD) \Rightarrow d[M,(BCD)] = d[F,(ABC)]$$
$\triangle AFB, \triangle ABD, \triangle ADF$ sunt echilaterale. $\Rightarrow AFDB$ tetraedru regulat. Fie
$FO' \perp (ABC) \Rightarrow O'$ este centrul cercului circumscris $\triangle ABD$ şi avem
$AO' = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.
In
$\triangle AFO' \overset{T.P.}{\Rightarrow} FO'^2 = a^2 - \dfrac{3a^2}{9} = \dfrac{6a^2}{9} \Rightarrow FO' = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d[M,(BCD)] = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.</td>
<td>3p</td>
</tr>
<tr>
<td>b) Desfăşurarea în plan este

</td>
<td>1p</td>
</tr>
</table>

	Pentru ca suma să fie minimă trebuie ca punctele E, N, P, F să fie coliniare. Ducem $NQ \parallel BD, Q \in [AB]$. Avem $\triangle BNE \equiv \triangle ANF \overset{U.L.U}{\Rightarrow} [AN] \equiv [NB]$ şi $[NQ]$ linie mijlocie în $\triangle ABD$. $\triangle PNQ \sim \triangle PFA \Rightarrow \frac{PN}{PF} = \frac{NQ}{AF} = \frac{1}{2} \Rightarrow PF = 2 \cdot NP$ De asemenea, $\triangle PQN \sim \triangle PDE \overset{T.F.A}{\Rightarrow} \frac{PN}{PE} = \frac{QN}{DE} = \frac{1}{4} \Rightarrow EN = 3 \cdot NP$. Deci $\frac{EN + PF}{NP} = \frac{3 \cdot NP + 2 \cdot NP}{NP} = \frac{5 \cdot NP}{NP} = 5$.	**2p**