Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2014

Ediţia 12+1

Focşani, februarie 2014

Clasa a 4-a

Problema 1. (a) Calculaţi: $510 - 5 \cdot [9600 : 30 - 15 \cdot (54 : 9)] + 1001$.

(b) Dacă $3a + 2b + 4c = 494$ şi $b + 2c = 160$, calculaţi a şi $ab + 2ac$.

Problema 2. (a) Calculaţi: $(2 + 4 + 6 + ... + 4028) - (1 + 3 + 5 + ... + 4027)$.
(b) Aflaţi ultimile patru cifre ale numărului x, unde $x = 9 + 99 + 999 + ... + 999..9$, unde ultimul termen are 9096 cifre.

Problema 3. (a) Să se scrie 221 ca sumă şi produs al aceloraşi numere naturale.

(b) De câte ori se foloseşte 2 în numerotarea unei cărţi cu 330 de pagini.

Problema 4. Dacă într-o clasă se aşează câte doi elevi într-o bancă, rămân 3 elevi în picioare. Dacă se aşează câte 3 elevi într-o bancă, rămân 4 bănci libere. Câţi elevi şi câte bănci sunt în clasa ?

SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1.

(a) $510 - 5(320 - 90) + 1001$ **(0,5p + 0,5p)**
$= 510 - 5 \cdot 230 + 1001 = 510 - 1150 + 1001$ **(1p+1p)**
$= 1511 - 1150 = 361$ **(1p)**
(b) $3a + 2(b + 2c) = 494 \Rightarrow 3a + 2 \cdot 160 = 494 \Rightarrow a = 58$ **(0,5p + 0,5p + 1p)**
$ab + 2ac = a(b + 2c) = 58 \cdot 160 = 9280$ **(0,5p + 0,5p)**

Problema 2.

(a) $1 + 1 + ... + 1 = 2014$, unde 1 apare de 2014 ori. **(4p)**
(b) $x = 9 + 99 + ... + 99...9 + 9096 - 9096 = 10 + 100 + ... + 100...0 - 9096 = 111...10 - 9096 \Rightarrow$ ultimile 4 cifre sunt 2014. **(3p)**

Problema 3.

(a) $221 = 13 \cdot 17 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 = 13 + 17 + 1 + 1 + ... + 1$, unde 1 apare de 191 de ori **(4p)**
(b) De la 1 la 99 de 20 de ori, de la 99 la 199 de 20 de ori, de la 200 la 299 de 20 + 100 de ori, de la 300 la 330 de 13 ori, deci în total de 173 de ori **(3p)**

Problema 4.

Când sunt câte 2 elevi în bancă, eliberăm 4 bănci şi obţinem 11 elevi în picioare. Cei 11 elevi se duc în 11 bănci pentru a avea câte 3 elevi în bancă. Deci avem 11+4=15 bănci şi $2 \cdot 15 + 3 = 33$ elevi. **(7p)**

Concursul interjudeţean de matematică UNIREA 2014
Ediţia 12+1
Focşani, februarie 2014
Clasa a 5-a

Problema 1. Să se afle trei numere naturale a, b, c ştiind că b împărţit la a dă câtul 27 şi restul 4, c împărţit la b dă câtul 3 şi restul 363, iar suma lor este 2014.

Problema 2. (a) Să se afle numerele $\overline{ab}$ pentru care $\overline{ab} - \overline{ba} = a \cdot b + b$.

(b) Fie $x = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{2012}$ şi $y = 1 + 2 + 3 + ... + 2013$. Să se arate că $x - y$ este divizibil cu 10.

Problema 3. (a) Să se afle numărul format din ultimile patru cifre ale numărului

$$x = 2^{2018} + 15 \cdot 2^{2014} + 2^{2012} + 2^3 + 2^2 + 2.$$

(b) Să se arate că $5^{2014} < 2^{4700}$.

Problema 4. (a) Dacă a, b dau la împărţirea cu 3 resturile 1, respectiv 2, să se arate că $a + b$ este divizibil cu 3.

(b) Este adevărat că, oricare ar fi 6 numere naturale distincte ce au la descompunerea în factori primi doar factorii 2 sau 5, există două dintre ele al căror produs este cub perfect?

SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1.

$b = 27a+4$ .... **1 punct**
$c = 3b+363$ .... **1 punct**
$c = 3(27a + 4) + 363 = 81a + 375$ .... **1 punct**
$a + (27a + 4) + (81a + 375) = 2014$ .... **2 puncte**
$a = 15$ .... **1 punct**
$b = 409, c = 1590$ .... **1 punct**

Problema 2.

(a) $9a - 9b = ab + b$, deci $9a = b(a + 10)$ .... **1 punct**
Deci $a + 10|9a$, iar $a + 10|9(a + 10)$, deci $a + 10|90$, deci $a \in \{5, 8\}$ .... **2 puncte**
$a = 5, b = 3$ deci $\overline{ab} = 53$ sau $a = 8, b = 4$ deci $\overline{ab} = 84$ .... **1 punct**
(b) $u.c.(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = ... = u.c.(2^{2009} + 2^{2010} + 2^{2011} + 2^{2012}) = 0$, deci $u.c.(x) = 1$
$u.c.(y) = u.c.(2013 \cdot 1007) = 1$ .... **1 punct**
Deci $u.c.(x - y) = 0$, deci $10|x - y$ .... **1 punct**

Problema 3.

(a) $x = 2^{2012} \cdot 125 + 14$ .... **1 punct**
$x = 2^{2011} \cdot 1000 + 14 = ...2014$ .... **2 puncte**
Numărul căutat este 2014 .... **1 punct**
(b) $5^{2014} = 5 \cdot 5^{2013} = 5 \cdot (5^3)^{671} = 5 \cdot 125^{671}$ .... **1 punct**
$5^{2014} < 5 \cdot 128^{671} = 5 \cdot 2^{4697}$ .... **1 punct**
$< 8 \cdot 2^{4697} = 2^{4700}$ .... **1 punct**

Problema 4.

(a) $a + b = 3x + 1 + 3y + 2 = 3(x + y + 1)$
Deci $a + b$ este divizibil cu 3 .... **2 puncte**
(b) NU! .... **1 punct**
Considerăm, de exemplu, numerele $10, 10^4, 10^7, 10^{10}, 10^{13}, 10^{16}$. Produsul oricăror 2 nu este cub perfect .... **4 puncte**

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 22 februarie 2014
Clasa a VI-a

Subiectul 1. a) Arătați că numărul $N = 2014 + \overline{abc6} + \overline{bca7} + \overline{cab8}$ este divizibil cu 185, oricare ar fi a, b, c cifre nenule în baza 10.

b) Determinați cele mai mici trei numere naturale consecutive a căror sumă se termină în 2014.

***

Subiectul 2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \text{ și } T_n = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \cdot \ldots \cdot S_n.$$

a) Calculați S_{100}.

b) Determinați numărul perechilor (k, p), $k, p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $\frac{S_k}{T_p} = 2014$.

Marius Damian, profesor, Brăila

Subiectul 3. Să se determine numerele naturale a, b, c, d și numerele naturale prime consecutive $p_1 < p_2 < p_3 < p_4$, știind că:

$$\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{c}{p_3} = \frac{d}{p_4} \text{ și } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 3132.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Subiectul 4. Se consideră unghiul $\sphericalangle MON$ cu măsura de 60° și punctele A, B astfel încât $O \in (AB)$ și punctele M, N sunt exterioare dreptei AB. Dacă $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOM$, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BON$, calculați $\mathrm{m}(\sphericalangle EOF)$.

***

SOLUȚII

Subiectul 1. a) Folosind descompunerea în baza 10, avem:

$N = 2014 + (1000a + 100b + 10c + 6) + (1000b + 100c + 10a + 7) + (1000c + 100a + 10b + 8)$ 1p

Deducem că $N = 2035 + 1110 \cdot (a + b + c)$ 1p

și în final $N = 185 \cdot (11 + 6a + 6b + 6c) \Rightarrow N \; \vdots \; 185.$ 1p

b) Suma a trei numere naturale consecutive este divizibilă cu 3. Într-adevăr, dacă $x \in \mathbb{N},$ atunci $x + (x+1) + (x+2) = 3(x+1) \; \vdots \; 3.$ 1p

Deoarece numărul 2014 nu este divizibil cu 3, cel mai mic număr natural care se termină în 2014 este 22014. .... 1p

Rezolvând ecuația $x + (x+1) + (x+2) = 22014$ obținem $x = 7337.$ 1p

Numerele căutate sunt: 7337, 7338, 7339. .... 1p

Subiectul 2. a) Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$ 1p

deci $S_{100} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{100 \cdot 101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}.$ 1p

b) Avem $S_k = \frac{k}{k+1}$ 1p

și $T_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{p}{p+1} = \frac{1}{p+1}.$ 1p

Atunci $\frac{S_k}{T_p} = 2014 \Leftrightarrow \frac{k}{k+1} \cdot (p+1) = 2014 \Leftrightarrow k \cdot (p+1) = 2014 \cdot (k+1).$ 1p

Astfel $k \mid 2014 \cdot (k+1)$ și cum $(k, k+1) = 1,$ avem $k \mid 2014$ 1p

În concluzie, $k \in D_{2014} = \{1, 2, 19, 38, 53, 106, 1007, 2014\}$, deci există 8 perechi (k, p) care îndeplinesc cerințele problemei 1p

Subiectul 3. $\frac{a}{p_1} = \frac{b}{p_2} = \frac{c}{p_3} = \frac{d}{p_4} = k, \; p_1 < p_2 < p_3 < p_4.$

Din $ap_2 = bp_1 \Rightarrow p_1 | ap_2$ și cum $(p_1, p_2) = 1 \Rightarrow p_1 | a \Rightarrow k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = k^2 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4).$ 2p

$3132 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 29 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87$

I. Dacă $p_1 \geq 5 \Rightarrow p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathfrak{M}_6 \pm 1 \Rightarrow p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2 \in \mathfrak{M}_{12} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 12n + 4, \; n \in \mathbb{N} \Rightarrow k^2 (12n + 4) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87 \Leftrightarrow k^2 (3n + 1) = 3^2 \cdot 87 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3$ și $3n + 1 = 87 \Leftrightarrow n = \frac{86}{3} \notin \mathbb{N}.$ 1p

II. Dacă $p_1 = 3 \Rightarrow p_2 = 5, p_3 = 7, p_4 = 11 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 9 + 25 + 49 + 121 = 204 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \cdot 204 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 \cdot 51 = 3^3 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 \cdot 17 = 3^2 \cdot 29 \Leftrightarrow k^2 = \dfrac{3^2 \cdot 29}{17} \notin \mathbb{N}$. 1p

III. Dacă $p_1 = 2 \Rightarrow p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 4 + 9 + 25 + 49 = 87 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2 \cdot 87 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 87 \Rightarrow k = 6$ și $a = 12,\ b = 18,\ c = 30,\ d = 42$. 3p

Subiectul 4. Notăm $\text{m}(\sphericalangle MOE) = \text{m}(\sphericalangle EOA) = a,\ \text{m}(\sphericalangle NOF) = \text{m}(\sphericalangle FOB) = b$ și $\text{m}(\sphericalangle EOF) = x$. Analizăm patru cazuri:

I. Dacă $A \in \text{Int}(\sphericalangle MON)$, notând $\text{m}(\sphericalangle AON) = c$, avem $x = a + b + c$.

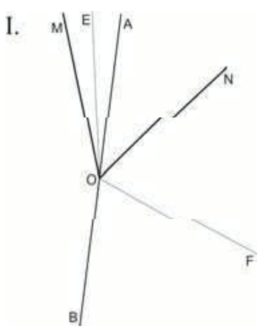
Atunci $2a + c = 60^\circ$ și $2b + c = 180^\circ \Rightarrow 2(a + b + c) = 240^\circ \Rightarrow a + b + c = 120^\circ \Rightarrow x = 120^\circ$. 2p

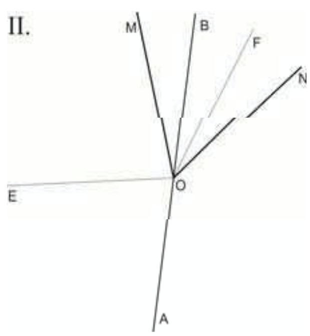
II. Dacă $B \in \text{Int}(\sphericalangle MON)$, notând $\text{m}(\sphericalangle BOM) = c$ și urmând același raționament ca la I, obținem $x = 120^\circ$. 1p

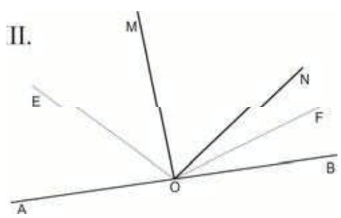
III. Dacă $A, B \in \text{Ext}(\sphericalangle MON)$ și punctele $A,\ M$ se află în același semiplan determinat de dreapta *ON*, atunci $x = a + b + 60^\circ$. Cum $2a + 2b + 60^\circ = 180^\circ$, avem $a + b = 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. 2p

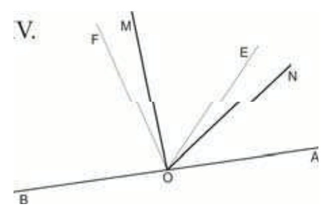
IV. Dacă $A, B \in \text{Ext}(\sphericalangle MON)$ și punctele $B,\ M$ se află în același semiplan determinat de dreapta *ON*, atunci $a + b - x = 60^\circ$ și $a + b + x = 180^\circ \Rightarrow 2x = 120^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$. 2p

În concluzie, $\text{m}(\sphericalangle EOF) \in \{60^\circ, 120^\circ\}$.









Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 31 ianuarie 2014
Clasa a VII-a

Subiectul 1. Să se determine $\overline{abc}$ și $k \in \mathbb{N}^*$ știind că

$$\frac{\overline{ab}}{2} = \frac{\overline{bc}}{5} = \frac{\overline{ca}}{k}.$$

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Subiectul 2. Se dă mulțimea $A = \left\{ \sqrt{n+2} + \frac{3}{\sqrt{4n+5}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$

a) Să se determine $A \cap \mathbb{Q}$.

b) Să se determine cel mai mic element al mulțimii A.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

Subiectul 3. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $\mathrm{m}(\sphericalangle B) = 45^\circ$, $AD \perp BC$ și $CE \perp AB$, unde $D \in BC$ și $E \in AB$. Dacă F este mijlocul laturii $[AC]$, arătați că:

a) $FE = FD$;

b) $EF \perp FD$.

Al. Gabriel Mîrșanu, profesor, Iași

Subiectul 4. Pe latura $[AC]$ a triunghiului ABC se consideră punctele M și N astfel încât $AM = 3$ cm, $MN = 4$ cm, $NC = 5$ cm, iar pe semidreptele $(BM$ și $(BN$ se iau punctele P, respectiv Q cu proprietatea $\frac{BM}{MP} = \frac{BN}{NQ} = \frac{1}{2}$.

a) Să se demonstreze că triunghiurile ABQ și BCP au același centru de greutate.

b)Să se determine raportul ariilor triunghiurilor ABM și CNQ.

Gabriel Daniilescu, profesor, Brăila

SOLUȚII

Subiectul 1. $\frac{\overline{ab}}{2}=\frac{\overline{bc}}{5}\Rightarrow 5\cdot\overline{ab}=2\cdot\overline{bc}\Rightarrow 5\cdot(10a+b)=2\cdot(10b+c)\Rightarrow 50a+5b=20b+2c\Rightarrow$

$\Rightarrow 50a=15b+2c\Rightarrow c\ \vdots\ 5\Rightarrow c=5.$ 2p

Relația devine $50a=15b+10\Rightarrow 10a=3b+2\Rightarrow 3b+2\ \vdots\ 10\Rightarrow b=6\Rightarrow 10a=20\Rightarrow a=2.$ 2p

Obținem $\overline{abc}=265$ 1p

și $\frac{26}{2}=\frac{65}{5}=\frac{52}{k}\Rightarrow k=2.$ 2p

Subiectul 2. a) Fie $n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow\frac{3}{\sqrt{4n+5}}=\alpha-\sqrt{n+2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{9}{4n+5}=\alpha^2-2\alpha\sqrt{n+2}+n+2\Rightarrow 2\alpha\sqrt{n+2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{n+2}\in\mathbb{Q}\Rightarrow n+2=p^2,\ \ p\in\mathbb{N}.$ 1p

$\sqrt{n+2}=\alpha-\frac{3}{\sqrt{4n+5}}\Rightarrow n+2=\alpha^2-\frac{6\alpha}{\sqrt{4n+5}}+\frac{9}{4n+5}\Rightarrow\frac{6\alpha}{\sqrt{4n+5}}\in\mathbb{Q}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sqrt{4n+5}\in\mathbb{Q}\Rightarrow 4n+5=q^2,\ \ q\in\mathbb{N}.$ 1p

$\Rightarrow 4\left(p^2-2\right)+5=q^2\Rightarrow 4p^2-q^2=3\Rightarrow(2p-q)(2p+q)=3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2p-q=1$ și $2p+q=3\Rightarrow p=q=1\Rightarrow n+2=1\Rightarrow n=-1\notin\mathbb{N}.$

Deci $A\cap\mathbb{Q}=\varnothing.$ 2p

b) Notăm $a_n=\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}},\ \ n\geq 0$ și analizăm inegalitatea

$a_{n+1}>a_n\Leftrightarrow\sqrt{n+3}+\frac{3}{\sqrt{4n+9}}>\sqrt{n+2}+\frac{3}{\sqrt{4n+5}}\Leftrightarrow\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}>\frac{3}{\sqrt{4n+5}}-\frac{3}{\sqrt{4n+9}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}>\frac{3\left(\sqrt{4n+9}-\sqrt{4n+5}\right)}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{n+3-n-2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>\frac{3(4n+9-4n-5)}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}>\frac{12}{\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right)}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\left(\sqrt{4n+9}+\sqrt{4n+5}\right)>12\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right)$ (1) 1p

Pentru $n\geq 1$, (1) $\Leftrightarrow\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\cdot\sqrt{2}\left(\sqrt{2n+\frac{9}{2}}+\sqrt{2n+\frac{5}{2}}\right)>12\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}\right).$

Dar $n\geq 1\Rightarrow\sqrt{4n+5}\cdot\sqrt{4n+9}\cdot\sqrt{2}\geq\sqrt{9}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}=3\sqrt{26}>3\sqrt{16}=12,\ \ 2n+\frac{9}{2}>n+3,$

$2n+\frac{5}{2}>n+2$ și prin înmulțirea inegalităților, (1) este adevărată. 1p

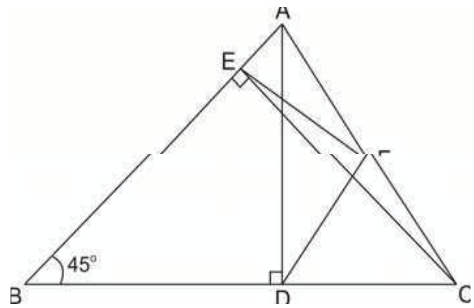
Pentru $n=0$, (1) devine

$\sqrt{5}\cdot\sqrt{9}\left(\sqrt{5}+\sqrt{9}\right)>12\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+3\right)>4\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\Big|^{2}\Leftrightarrow 5\left(14+6\sqrt{5}\right)>16\left(5+2\sqrt{6}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 70+30\sqrt{5}>80+32\sqrt{6}\Leftrightarrow 30\sqrt{5}>10+32\sqrt{6}$, fals.

Deci $a_{n+1}>a_n,\ \forall n\geq 1$ și $a_1<a_0\Rightarrow a_1=\sqrt{3}+1$ este cel mai mic element din A. 1p

Subiectul 3.



a) $[DF]$ este mediană în ΔADC dreptunghic $\Rightarrow DF=\frac{1}{2}AC$ (1) 1p

$[EF]$ este mediană în ΔAEC dreptunghic $\Rightarrow EF=\frac{1}{2}AC$ (2) 1p

Concluzia: $FE=FD$. 1p

b) Din (1) $\Rightarrow \Delta FDC$ isoscel cu $\sphericalangle FDC\equiv\sphericalangle FCD$ (3) 0,5p

Din (2) $\Rightarrow \Delta FAE$ isoscel cu $\sphericalangle FEA\equiv\sphericalangle FAE$ 0,5p

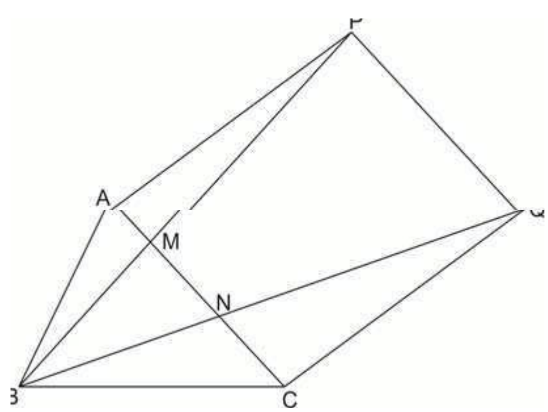
$\sphericalangle EFC$ este exterior pentru $\Delta EFA\Rightarrow \mathrm{m}\left(\sphericalangle EFC\right)=2\cdot\mathrm{m}\left(\sphericalangle A\right)$ 1p

Din (3) $\Rightarrow \mathrm{m}\left(\sphericalangle DFC\right)=180^0-2\cdot m\left(\sphericalangle C\right)$ 1p

$\mathrm{m}\left(\sphericalangle EFD\right)=\mathrm{m}\left(\sphericalangle EFC\right)-\mathrm{m}\left(\sphericalangle DFC\right)=2\left(\mathrm{m}\left(\sphericalangle A\right)+\mathrm{m}\left(\sphericalangle C\right)\right)-180^0=2\cdot 135^0-180^0=90^0$,

deci $EF\perp FD$. 1p

Subiectul 4.



a) $\frac{BM}{MP}=\frac{BN}{NQ}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{BM}{BP}=\frac{BN}{BQ}=\frac{1}{3}\Rightarrow\Delta BMN\sim\Delta BPQ$ cu $\frac{MN}{PQ}=\frac{1}{3}$ 1p

$\Rightarrow PQ=3MN=12$ cm $\Rightarrow PQ=AC$.

În plus, $MN\parallel PQ\Rightarrow AC\parallel PQ$, deci $ACPQ$ este paralelogram 1p

Notăm $AQ \cap CP = \{O\} \Rightarrow O$ este mijlocul diagonalei $[AQ]$ dar și al diagonalei $[CP] \Rightarrow$ $\Rightarrow [BO]$ mediană în triunghiul BAQ dar și în triunghiul BCP și cum centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf și $\frac{1}{3}$ de bază $\Rightarrow$ centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid. 2p

b) $\frac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta APM}} = \frac{\frac{BM \cdot d(A, BM)}{2}}{\frac{PM \cdot d(A, PM)}{2}} = \frac{BM}{PM} = \frac{1}{2}$ 1p

$\frac{A_{\Delta CNQ}}{A_{\Delta APM}} = \frac{\frac{CN \cdot d(Q, CN)}{2}}{\frac{AM \cdot d(P, AM)}{2}} = \frac{CN}{AM} = \frac{5}{3}$ 1p

$\frac{A_{\Delta ABM}}{A_{\Delta CNQ}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot A_{\Delta APM}}{\frac{5}{3} \cdot A_{\Delta APM}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{10}$. 1p

Concursul Interjudețean de Matematică "UNIREA"
Focșani, 31 ianuarie 2014
Clasa a VIII-a
Subiecte

Subiectul I

Să se afle numerele reale x, y, z știind că au loc simultan relațiile:

$x + y + z = 2013$, **(1)**; $x^2 = yz$, **(2)** și $y^2 = xz$, **(3)**.

Subiectul II

Se dă numărul A = $(n - 5)(n - 2)(n + 2)(n - 4)(n - 3) - 1080$.

Arătați că A se divide cu:

a) 12, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$;

b) $n - 7$, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$.

Subiectul III

În centrul O al pătratului $ABCD$ cu latura de lungime a se consideră perpendiculara d pe planul acestuia. Să se arate că:

a) Există cel puțin două puncte pe dreapta d situate la distanța a de punctul D.

b) Dacă E este unul din punctele determinate la **a)**, atunci $AE \perp CE$.

c) Aflați distanța dintre dreptele AC și DE.

d) Dacă M este un punct mobil (variabil) pe segmentul (DE), determinați poziția punctului M astfel încât aria triunghiului MAC să fie minimă. În acest caz aflați aria triunghiului MAC.

Subiectul IV

Se dă ecuația $x^y + x^z + x^t = 31 \cdot x^{31}$.

a) Să se rezolve ecuația în mulțimea numerelor naturale.

b) Câte soluții are ecuația în mulțimea numerelor naturale dacă $x \neq y \neq z \neq t \neq x$ și $x + y + z + t = 10$?

Subiectul I

Dacă $x = 0$ din **(2)** și **(3)** rezultă că $y = 0$ și $z \in \mathbb{R}$, **(4)**. (1p)

Din **(1)** și **(4)** $\Rightarrow x = y = 0$ și $z = 2013$, soluție. (1p)

Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, din **(2)** și **(3)** $\Rightarrow z^2 = xy$, **(5)**. (1p)

Din **(2)**, **(3)** și **(5)** rezultă $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = y = z$, **(6)**. (2p)

Din **(1)** și **(6)** rezultă $x = y = z = 671$. (1p)

Prin urmare, $(x, y, z) \in \{(0, 0, 2013), (671, 671, 671)\}$. (1p)

Altă abordare:

Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, atunci $\begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} = \dfrac{y}{x} \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 \\ y^2 = xz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \{(m, m, m)\}$, $m \in \mathbb{R}^*$.

Subiectul II

a) Numere întregi $n - 5$, $n - 4$, $n - 3$ și $n - 2$ sunt consecutive deci produsul lor se divide cu 3 și cu 4. (1p)

Cum $(3, 4) = 1$, rezultă că 12 divide produsul lor, oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. (1p)

b) Varianta 1

$A = [(n - 5)(n - 2)][(n - 4)(n - 3)](n + 2) - 1080$ (1p)

$A = (n^2 - 7n + 10)(n^2 - 7n + 12)(n + 2) - 1080$ (1p)

$A = [n(n - 7) + 10][n(n - 7) + 12](n + 2) - 1080$ (1p)

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 120[(n - 7) + 9] - 1080$ (1p)

$A = \mathcal{M}_{n-7} + 1080 - 1080 = \mathcal{M}_{n-7}$. (1p)

Varianta 2

$A = (n - 5)(n - 4)(n - 3)(n - 2)[(n - 7) + 9] - 1080$ (1p)

$A = 9(n - 5)(n - 4)(n - 3)(n - 2) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 9(n - 5)(n - 4)(n - 3)(n - 7 + 5) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$ (1p)

$A = 45(n - 5)(n - 4)(n - 3) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 45(n - 5)(n - 4)(n - 7 + 4) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$ (1p)

$A = 45 \cdot 4(n - 5)(n - 4) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 180(n - 5)(n - 7 + 3) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

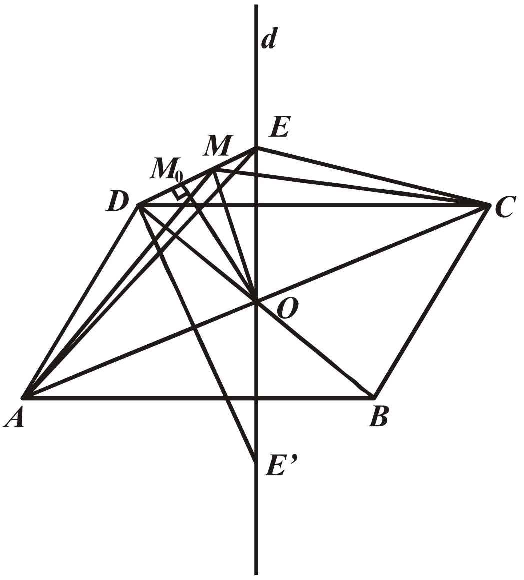
$A = 540(n - 5) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$ (1p)

$A = 540(n - 7 + 2) + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = 1080 + \mathcal{M}_{n-7} - 1080$

$A = \mathcal{M}_{n-7}$. (1p)

Subiectul III



a) Fie $E \in d$. În ΔDOE dreptunghic, dacă $DE = a$, cum $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ rezultă că $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Reciproc, dacă $OE = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, atunci $DE = a$. (1p)

Însă și punctul E' simetricul lui E față de O satisface condiția dată, $DE' = a$. (1p)

b) În ΔAEC, OE este mediană și $OE = \dfrac{AC}{2}$, deci m($\sphericalangle AEC$) = 90°. (1p)

c) Din $AC \perp d$, $AC \perp BD$ și $BD \cap d = \{O\}$, rezultă că $AC \perp (ODE)$, deci $AC \perp OM$, oricare ar fi $M \in DE$. (1p)

Dacă $OM_0 \perp DE$, atunci $OM_0 \perp AC$ și OM_0 este perpendiculara comună a dreptelor AC și DE.

Distanța dintre dreptele AC și DE este $OM_0 = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{a}{2}$. (1p)

d) Din $AC \perp (ODE)$ și $OM \subset (ODC)$ rezultă că $AC \perp OM$.

$\mathcal{A}_{MAC} = \dfrac{AC \cdot MO}{2}$ = minimă dacă MO este minimă, adică $M = M_0$. (1p)

$\mathcal{A}_{AMC} = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$ unități de arie. (1p)

Subiectul IV

a) $x = 0$ implică $y, z, t \in \mathbb{N}^*$, soluție.

$x = 1$ implică $3 = 31$, contradicție! (1p)

Dacă $x \geq 2$ ecuația fiind simetrică în y, z și t putem considera ordinea $y \leq z \leq t$ și aceasta este echivalentă cu: $x^y \cdot (1 + x^{z-y} + x^{t-y}) = 31 \cdot x^{31}$, **(1)**. (1p)

Arătăm că dacă $y < 31$ sau $y \geq 32$ se obțin contradicții! (1p)

Prin urmare, $y = 31$ și ecuația **(1)** este echivalentă cu: $x^{31} \cdot (1 + x^{z-31} + x^{t-31}) = 31 \cdot x^{31} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 + x^{z-31} + x^{t-31} = 31 \Leftrightarrow x^{z-31} \cdot (1 + x^{t-z}) = 30$, de unde $x^{z-31} \in \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

Analizând toate cazurile se obțin soluțiile: $(x, y, z, t) \in \{(29, 31, 31, 32); (3, 31, 32, 34); (5, 31, 32, 33), (15, 31, 32, 32)\}$. (1p)

Prin urmare, ecuația din enunț are soluțiile: $(x, y, z, t) \in \{(0, m, n, p); (29, 31, 31, 32); (29, 31, 32, 31); (29, 32, 31, 31); (3; 31; 32; 34); (3; 31; 34; 32); (3; 32; 31; 34); (3; 32; 34; 31); (3; 34; 31; 32); (3; 34; 32; 31); (5; 31; 32; 33); (5; 31; 33; 32); (5; 32; 31; 33); (5; 32; 33; 31); (5; 33; 31; 32); (5; 33; 32; 31); (15; 31; 32; 32); (15; 32; 31; 32); (15; 32; 32; 31)\}$, unde $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.

b) Suma soluțiilor ecuației date este egală cu 10 numai dacă $x = 0$ și $y, z, t \in \mathbb{N}^*$. Deci $y + z + t = 10$. Însă $10 = 1 + 2 + 7 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 3 + 5$. (1p)

Prin permutări circulare se obțin $4 \cdot 6 = 24$ de soluții. (1p)

Subiecte propuse de prof. Artur Bălăucă