Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA a VII-a

Problema 1.

(i) Descompuneţi în factori expresia $xy - x - y + 1$.

(ii) Demonstraţi că dacă numerele întregi a şi b verifică $|a + b| > |1 + ab|$, atunci $ab = 0$.

Problema 2. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Determinaţi restul împărţirii numărului $n(n + 1)(n + 2)$ la $n - 1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $\angle BAC = 40°$. Punctele S şi T se află pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât $\angle BAT = \angle BCS = 10°$. Dreptele AT şi CS se intersectează în punctul P. Demonstraţi că $BT = 2PT$.

Problema 4. Considerăm patrulaterul $ABCD$ cu $AD = DC = CB$ şi $AB \parallel CD$. Punctele E şi F aparţin segmentelor CD şi BC astfel încât $\angle ADE = \angle AEF$. Demonstraţi că

(i) $4CF \leq CB$.

(ii) Dacă $4CF = CB$, atunci AE este bisectoarea unghiului $\angle DAF$.

Timp de lucru 3 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 13 Martie 2010

CLASA A VII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.

(i) Descompuneţi în factori expresia $xy - x - y + 1$.

(ii) Demonstraţi că dacă numerele întregi a şi b verifică $|a + b| > |1 + ab|$, atunci $ab = 0$.

Soluţie.
(i) Se verifică prin calcul că $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$. **1 punct**
(ii) Ambii membri ai inegalităţii sunt pozitivi, deci prin ridicare la pătrat se obţine inegalitatea echivalentă $a^2 + b^2 + 2ab > 1 + 2ab + a^2b^2$
....**2 puncte**
De aici rezultă $(a^2 - 1)(b^2 - 1) < 0$.
....**2 puncte**
Presupunând prin absurd că $ab \neq 0$, rezultă $a \neq 0$ şi $b \neq 0$. Cum a şi b sunt numere întregi, rezultă că $a^2 - 1 \geq 0$ şi $b^2 - 1 \geq 0$.
....**1 punct**
Atunci $(a^2 - 1)(b^2 - 1) \geq 0$, contradicţie.
....**1 punct**

Problema 2. Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Determinaţi restul împărţirii numărului $n(n + 1)(n + 2)$ la $n - 1$.

Gazeta Matematică

Soluţie. Avem $n(n + 1)(n + 2) = (n - 1 + 1)(n - 1 + 2)(n - 1 + 3) = (n - 1)^3 + 6(n - 1)^2 + 11(n - 1) + 6$.
....**3 puncte**
Dacă $n - 1 > 6$, restul este 6.
....**1 punct**
Dacă $n = 2, 3, 4, 7$, restul este 0.
....**1 punct**
Dacă $n = 5$, restul este 2.
....**1 punct**
Dacă $n = 6$, restul este 1.
....**1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $\angle BAC = 40°$. Punctele S şi T se află pe laturile AB, respectiv BC, astfel încât

$\angle BAT = \angle BCS = 10^\circ$. Dreptele AT şi CS se intersectează în punctul P. Demonstraţi că $BT = 2PT$.

Soluţie. Triunghiul ABC este isoscel, deci $\angle ABC = \angle ACB = 70^\circ$. Avem $\angle TAC = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$ şi $\angle ACS = 70^\circ - 10^\circ = 60^\circ$, deci $\angle APC = 90^\circ$.

....**2 puncte**

Triunghiurile ABT şi BSC sunt asemenea `(UU)`, de unde $\dfrac{BS}{BC} = \dfrac{BT}{AB}$.

....**1 punct**

Având unghiul B comun, triunghiurile BST şi BCA sunt asemenea `(LUL)`, deci $TB = TS$ şi $\angle TSB = 70^\circ$.

....**2 puncte**

Deoarece $\angle CSA = \angle SBC + \angle SCB = 70^\circ + 10^\circ = 80^\circ$, rezultă că $\angle PST = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$.

....**1 punct**

Triunghiul STP este dreptunghic în P şi $\angle PST = 30^\circ$, deci $BT = 2PT$.

....**1 punct**

Problema 4. Considerăm patrulaterul $ABCD$ cu $AD = DC = CB$ şi $AB \parallel CD$. Punctele E şi F aparţin segmentelor CD şi BC astfel încât $\angle ADE = \angle AEF$. Demonstraţi că

(i) $4CF \leq CB$.

(ii) Dacă $4CF = CB$, atunci AE este bisectoarea unghiului $\angle DAF$.

Soluţie.

(i) Avem $\angle FEC = 180^\circ - \angle AEF - \angle DEA = 180^\circ - \angle ADE - \angle DEA = \angle DAE$. ....**1 punct**

Din $AD = DC = CB$ şi $AB \parallel CD$ rezultă $\angle ADC = \angle DCB$, deci triunghiurile ADE şi ECF sunt asemenea `(UU)`. Obţinem

$$\frac{AD}{EC} = \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{CF} \tag{1}$$

....**2 puncte**

De aici $AD \cdot CF = EC \cdot DE \leq \frac{1}{4}(EC + DE)^2 = \frac{1}{4}CD^2$, deci $4CF \leq CB$, în baza egalităţilor $AD = DC = CB$.

....**1 punct**

(ii) Dacă $4CF = CB$, atunci în inegalitatea $EC \cdot DE \leq \frac{1}{4}(EC + DE)^2$ avem egalitate, adică $CE = ED$.

....**1 punct**

Relaţia (1) devine $\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{AE}{EF}$. Cum $\angle ADE = \angle AEF$, rezultă că triunghiurile ADE şi AEF sunt asemenea `(LUL)`.

....**1 punct**

Atunci $\angle DAE = \angle EAF$, adică AE este bisectoarea unghiului $\angle DAF$.

....**1 punct**