CLASA A VIII-A
ENUNȚURI

SUBIECTUL 1.

1. Fie reperul cartezian xOy și funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x+3$
Notăm $G_f\cap Ox=\{A\}$, $G_g\cap Ox=\{C\}$, $G_f\cap Oy=\{B\}$ și $G_g\cap Oy=\{D\}$.

- **a)** $(6\ p)$ Demonstrați că dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
- **b)** $(4\ p)$ Calculați aria și perimetrul $\triangle BCD$.
- **c)** $(4\ p)$ Arătați că $AD\perp BC$.

2. $(6\ p)$De-a lungul existenței sale, „*visul*" fracției $F(x)=\dfrac{x^2+33}{x-2}$ a fost să devină „*întreagă*". Un moment x al existenței sale se numește „*oportun*" dacă $x\in\mathbb{N}$. Aflați câte momente *oportune* a avut fracția F, de-a lungul existenței sale, în care putea să-și împlinească *visul*.

SUBIECTUL 2.

1. $(10\ p)$ Rezolvați inecuația $\dfrac{x^2+x-2}{5x+5}\cdot\left[\left(\dfrac{2x+5}{x+3}-1\right)\cdot\dfrac{x+3}{x-2}-\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right]\cdot(x-2)>2015$ în mulțimea $\mathbb{R}/\{-3;-2;-1;2\}$.

2. **a)** $(5\ p)$Arătați că are loc inegalitatea: $\dfrac{a+b}{2}\le\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, pentru orice $a,b\in(0;\infty)$.

b) $(5\ p)$Fie numerele $a,b,c\in\mathbb{R}_+^*$ astfel încât $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\dfrac{2}{3}$. Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{2a+\frac{b}{2}}+\sqrt{2b+\frac{c}{2}}+\sqrt{2c+\frac{a}{2}}\ge 1.$$

SUBIECTUL 3.

1. $(10\ p)$În piramida triunghiulară regulată $VABC$ de vârf V, muchia laterală face cu planul bazei un unghi de 30^0. Dacă distanța dintre centrele de greutate ale bazei și ale unei fețe laterale este de $4\,cm$, calculați volumul piramidei.

2. $(10\ p)$Pe perpendiculara în A pe planul dreptunghiului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât MB, BD și MD sunt direct proporționale cu $\sqrt{34}$, 5 și respectiv $\sqrt{41}$, iar $MC=15\sqrt{2}\ cm$. Calculați dimensiunile dreptunghiului și lungimea segmentului $[MA]$.

NOTĂ:
- *Fiecare subiect se punctează de la 0-20 puncte. Toate subiectele sunt obligatorii.*
- *Durata probei este de 120 minute din momentul în care s-a terminat distribuirea subiectelor către elevi.*
- *Elevul are dreptul să rezolve subiectele în orice ordine dorește.*

CLASA A VIII-A
BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL 1.

1.

a) Determinarea coordonatelor punctelor $A(5,0), B(0,-5), C(3,0), D(0,3)$……………….2p
Determinarea coordonatele punctului $M(4,-1); \{M\} = AB \cap CD$………………………1p
Calcularea lungimilor: $BD = 8, DM = 4\sqrt{2}, BM = 4\sqrt{2}$……………………………..1p
ΔBMD dreptunghic în M …………………………………………………………..1p
Finalizare: $G_f \perp G_g (AB \perp CD)$ ……………………………………………………1p

b) $A_{\Delta BCD} = \frac{BD \cdot OC}{2}$……………………………………………………………………2p
$A_{\Delta BCD} = 12; P = \sqrt{34} + 3\sqrt{2} + 8$………………………………………………………2p

c) C - ortocentrul ΔBDA…………………………………………………………………3p
Finalizare $AD \perp BC$…………………………………………………………………………1p

2. $F(x) = \frac{x^2+33}{x-2} \in \mathbb{Z}$……………………………………………………………………1p
$F(x) = x + 2 + \frac{37}{x-2} \in \mathbb{Z}$…………………………………………………………………2p
$x - 2 \in D_{37} = \{-37, -1, 1, 37\}$…………………………………………………………1p
$x \in \{-35, 1, 3, 37\}$……………………………………………………………………………1p
Finalizare $x \in \{1,3,37\}$ - 3 nr oportune ……………………………………………..1p

SUBIECTUL 2.

1) $\frac{(x+2)(x-1)}{5(x+1)} \cdot \left[\frac{x+2}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} - \frac{1}{(x-2)(x+2)}\right](x-2) > 2015$…………………………………………………5p
$\frac{(x+2)(x-1)}{5(x+1)} \cdot \frac{5x+5}{x+2} > 2015$………………………………………………………………..3p
$x - 1 > 2015 \Rightarrow x > 2016$……………………………………………………………………..1p
Finalizare $x \in (2016, \infty)$…………………………………………………………………………1p

2) a) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{x}} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$……………………………………………………...2p
$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2$……………………………………………………………………1p
$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$………………………………………………………………………………..1p
$(a-b)^2 \geq 0, \forall a, b \in (0, \infty)$……………………………………………………………………1p

b) $\sqrt{2a + \frac{b}{2}} = \sqrt{\frac{4a+b}{2}} \geq \frac{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ ……………………………………………………..1p
$\sqrt{2b + \frac{c}{2}} = \sqrt{\frac{4b+c}{2}} \geq \frac{2\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2}$ ………………………………………………………1p
$\sqrt{2c + \frac{a}{2}} = \sqrt{\frac{4c+a}{2}} \geq \frac{2\sqrt{c}+\sqrt{a}}{2}$ ……………………………………………………….1p
$\sqrt{2a + \frac{b}{2}} + \sqrt{2b + \frac{c}{2}} + \sqrt{2c + \frac{a}{2}} \geq \frac{3\sqrt{a}+3\sqrt{b}+3\sqrt{c}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$…………………………………..2p

SUBIECTUL 3.

1. O, G centrele de greutate ale $\Delta ABC, \Delta VAB \Rightarrow \frac{OM}{MC} = \frac{MG}{VM} = \frac{1}{3}$; M - mijlocul $[AB]$............2p
   $\Delta OMG \sim \Delta CMV \Rightarrow \frac{OG}{CV} = \frac{1}{3} \Rightarrow CV = 12$............2p
   Determinarea lungimii segmentelor $VO = 6cm$, $OC = 6\sqrt{3}cm$............2p
   $OC = \frac{l\sqrt{3}}{3}$ și determinarea lungimii laturii bazei $AB = 18cm$............2p
   Formula pentru volum, calculul $V = 162\sqrt{3}$............2p

2. Notarea dimensiunilor dreptunghiului și a lui MA: L, l, x
   $\frac{MB}{\sqrt{34}} = \frac{BD}{5} = \frac{MD}{\sqrt{41}} = k \Rightarrow MB = k\sqrt{34}; BD = 5k; MD = k\sqrt{41}$............2p
   $x^2 + L^2 = 34k^2, L^2 + l^2 = 25k^2, l^2 + x^2 = 41k^2$............3p
   $x^2 + L^2 + l^2 = 450, k = 3$............2p
   $L = 9, l = 12, x = 15$............3p