CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ "EUCLID" 21. 04. 2013 ***Clasa a VI-a***

SUBIECTUL I (20p)

1) Dacă numerele x, y, z, t sunt direct proporționale cu $2; 3; 4; 5$, care dintre numere este cel mai mare? **a)** x **b)** y **c)** z **d)** t

2) Care este măsura unui unghi format de două drepte perpendiculare?
a) 0° **b)** 180° **c)** 90° **d)** 360°

3) Care este numărul care are jumătatea cu 2 mai mică decât 5? **a)** 7 **b)** 6 **c)** 2 **d)** 4

4) Care dintre fracțiile următoare este raportul numerelor 36 şi 12? **a)** $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{22}{55}$ **c)** $\frac{3}{1}$ **d)** $\frac{2}{9}$

5) Alegeți dintre numerele de mai jos pe cel egal cu 25% din 60. **a)** 12 **b)** 15 **c)** 54 **d)** 20

SUBIECTUL II (40p)

1) Dacă M se află pe mediatoarea segmentului (AB), atunci $|MA| - |MB| = \ldots$?

2) Care este diferența măsurilor a două unghiuri alterne interne formate de două drepte paralele cu o secantă ?

3) Care este diferența distanțelor de la un punct aflat pe bisectoarea unui unghi, la laturile unghiului?

4) Care este ortocentrul triunghiului dreptunghic ABC, cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$?

5) Aflați numărul x ştiind că numerele $3, x$ direct proporționale cu $4, 8$.

6) Care este numărul maxim de unghiuri drepte pe care le poate avea un triunghi?

7) Cât va costa un produs cu prețul de 100 lei, după o reducere de 20%?

8) Aflați un număr ştiind că 40% din el este 160.

9) Dacă $\frac{a}{b} = 0,2$, care este valoarea raportului $\frac{b}{a}$?

10) Scrieți ca raport procentual numărul $\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL III (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea $A = \{4n - 1 \mid n \in \mathbf{N}^*\}$, mulțimea $P = \{p \in A \mid p = \text{număr prim}\}$ şi mulțimea $B = \{4n + 1 \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

a) Să se scrie 4 elemente ale mulțimii A. **b)** Să se scrie 4 elemente ale mulțimii P.

c) Să se scrie 2 elemente din mulțimea A-P. **d)** Să se arate că $2 \notin A$ şi $5 \notin P$.

e) Să se scrie un element prim din mulțimea $B \cap \{32, 33, \ldots, 40\}$.

f) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci numărul $N = 4a_1a_2\ldots a_n - 1 \in A$.

g) Ştiind că un produs de elemente din mulțimea B este tot un element din mulțimea B, să se arate că mulțimea P este infinită.

SUBIECTUL IV (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

În triunghiul ABC considerăm punctele $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ astfel încât dreptele AD, BE şi CF să fie concurente în M. Dacă XYZ este un triunghi, notăm prin S_{XYZ} aria sa. Se ştie că aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul dintre lungimea unei laturi şi lungimea înălțimii corespunzătoare ei.

a) Să se arate că dacă pentru $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ ($b, d, b+d, b-d$, *nenule*) avem $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, atunci $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$.

b) Să se arate că $\frac{AM}{MD} = \frac{S_{AMC}}{S_{CMD}}$. **c)** Să se arate că $\frac{AM}{MD} = \frac{S_{AMB}}{S_{BMD}}$. **d)** Să se arate că $\frac{AM}{MD} = \frac{S_{AMC} + S_{AMB}}{S_{BMC}}$.

e) Să se arate că $\frac{AF}{FB} = \frac{S_{AFC}}{S_{BFC}} = \frac{S_{AFM}}{S_{BFM}} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}$. **f)** Să se arate că $\frac{AE}{EC} = \frac{S_{ABE}}{S_{BEC}} = \frac{S_{AME}}{S_{EMC}} = \frac{S_{AMB}}{S_{BMC}}$.

g) Să se arate că $\frac{AM}{MD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$.

Test conceput de prof. LAVINIA SAVU, CONSTANTIN BĂRĂSCU şi DUMITRU DOBRE

BAREM DE CORECTARE

Oficiu	**(10p)**
I.(20p)	**1. (4p) d); 2. (4p) c); 3. (4p) b); 4. (4p) c); 5. (4p) b);**
II.(40p)	**1) (4p)** 0 **2) (4p)** 0 **3) (4p)** 0 **4) (4p)** A **5) (4p)** 6 **6) (4p)** 1 **7) (4p)** 80 **8) (4p)** 400 **9) (4p)** 5 **10) (4p)** 25%

SUBIECTUL III

a) 3, 7, 11, 15.

b) 3, 7, 11, 19.

c) 15, 27.

d) $4n-1=2 \Rightarrow n=\frac{3}{4}\notin \mathbf{N}$. $4n-1=5 \Rightarrow n=\frac{6}{4}\notin \mathbf{N}$. Deci $2\notin A, 5\notin P$.

e) $4\cdot 9+1=37$.

f) Evident.

g) Presupunem că mulțimea *P* este finită. Fie $P=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $n\in \mathbf{N}^*$ şi numărul $N=4a_1a_2\ldots a_n-1\in A$. Dacă *N* este prim, atunci este fals; dacă *N* nu este prim, se descompune într-un produs de numere prime. Acestea nu pot fi toate din mulțimea *B*, conform **g)**, deci *N* se va divide cu un număr prim din mulțimea *P*, fals. Aşadar mulțimea *P* este infinită.

SUBIECTUL IV

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=k=\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$. Analog $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$.

b) Dacă *h=d(C,AD)*, atunci $S_{AMC}=AM\cdot h/2$ şi $S_{DMC}=\frac{MD\cdot h}{2}$. Rezultă că $\frac{S_{AMC}}{S_{DMC}}=\frac{AM}{MD}$.

c) Analog cu **b).**

d) Avem $\frac{AM}{MD}=\frac{S_{AMC}}{S_{CMD}}=\frac{S_{AMC}+S_{AMB}}{S_{CMD}+S_{BMD}}=\frac{S_{AMC}+S_{AMB}}{S_{BMC}}$.

e) Notăm cu *d(C,AB)* distanța de la punctul *C* la dreapta *AB*. Atunci $S_{AFC}=\frac{AF\cdot d(C,AB)}{2}, S_{BFC}=\frac{BF\cdot d(C,AB)}{2}$. Rezultă că $\frac{S_{AFC}}{S_{BFC}}=\frac{AF}{BF}$. Dacă notăm cu *d(M,AB)* distanța de la *M* la dreapta *AB*, analog rezultă că $\frac{S_{AFM}}{S_{BMF}}=\frac{AF}{BF}$, $\frac{AF}{BF}=\frac{S_{AFC}-S_{AFM}}{S_{BFC}-S_{BMF}}=\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}$.

f) Analog cu **e)**.

g) Avem $\frac{AF}{FB}+\frac{AE}{EC}=\frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}+\frac{S_{AMB}}{S_{BMC}}=\frac{S_{AMC}+S_{AMB}}{S_{BMC}}=\frac{AM}{MD}$, conform **f)**, **e)**, **d)**.