**CLASA a VI-a**

**Problema 1**

a) Să se determine numărul raţional $N$ pentru care este adevarată egalitatea de mai jos:

$$\frac{6}{5}+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}+\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}=\frac{6}{5}\cdot N;$$

b) Să se calculeze suma $S=\frac{2010}{2009}+\frac{2010\cdot 2008}{2009\cdot 2007}+\frac{2010\cdot 2008\cdot 2006}{2009\cdot 2007\cdot 2005}+....+\frac{2010\cdot 2008\cdot .....\cdot 4\cdot 2}{2009\cdot 2007\cdot .....\cdot 3\cdot 1}$ .

Barem:

a) $\frac{6}{5}+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}+\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}=\frac{6}{5}\cdot\left(1+\frac{4}{3}+\frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}\right)\Rightarrow N=1+\frac{4}{3}+\frac{4\cdot 2}{3\cdot 1}=5$ ........................................................ **3p**

b) Notăm cu

$$S_{2n}=\frac{2n}{2n-1}+\frac{2n\cdot(2n-2)}{(2n-1)\cdot(2n-3)}+\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)}+....+\frac{2n\cdot(2n-2)\cdot.....\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot.....\cdot 3\cdot 1}$$

$S_{2n}=\frac{2n}{2n-1}\left[1+\frac{2n-2}{2n-3}+\frac{(2n-2)\cdot(2n-4)}{(2n-3)\cdot(2n-5)}+....+\frac{(2n-2)\cdot.....\cdot 4\cdot 2}{(2n-3)\cdot.....\cdot 3\cdot 1}\right]=\frac{2n}{2n-1}\cdot(1+S_{2n-2})$ ................ **1p**

Avem că $S_2=\frac{2}{1}=2$

Atunci $S_4=\frac{4}{3}\cdot(1+S_2)=\frac{4}{3}\cdot 3=4$ .

Pentru $S_6=\frac{6}{5}\cdot(1+S_4)=\frac{6}{5}\cdot 5=6$ ............................................................................................. **1p**

Calculând analog celelalte sume obţinem că

$S_{2n}=\frac{2n}{2n-1}\cdot(1+S_{2n-2})=\frac{2n}{2n-1}\cdot[1+(2n-2)]=2n$ ........................................................................ **1p**

În concluzie $S_{2010}=2010$ ......................................................................................................... **1p**

## CLASA a VI-a

## Problema 2

Se consideră mulţimea $M=\{a_1, a_2, a_3, ....., a_{2010}\} \subset \mathbf{N}$.

Dacă $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, ..., $a_{2009}^2 = a_{2008} \cdot a_{2010}$ şi $a_{101} = 10^{101}, a_{1001} = 10^{1001}$, calculaţi $a_{2010}$.

**Barem:**

Avem $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2}$; $a_3^2 = a_2 \cdot a_4 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3}$ ,......, $a_{2009}^2 = a_{2008} \cdot a_{2010} \Rightarrow \frac{a_{2009}}{a_{2008}} = \frac{a_{2010}}{a_{2009}}$ ................**3p**

Notăm $\frac{a_2}{a_1} = t \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot t, a_3 = a_2 \cdot t = a_1 \cdot t^2, a_4 = a_3 \cdot t = a_1 \cdot t^3, ..., a_{2010} = a_{2009} \cdot t = a_1 \cdot t^{2009}$ ......................**1p**

Deci $a_{101} = a_1 \cdot t^{100}$ şi $a_{1001} = a_1 \cdot t^{1000} \Rightarrow 10^{101} = a_1 \cdot t^{100}$ şi $10^{1001} = a_1 \cdot t^{1000}$ ..................................................**1p**

Împărţind cele două relaţii obţinem $10^{900} = t^{900} \Rightarrow t = 10$. ......................................................................**1p**

Înlocuind într-una din relaţiile anterioare deducem $a_1 = 10$ şi $a_{2010} = 10^{2010}$ ..........................................**1p**

## CLASA a VI-a

## Problema 3

În triunghiul ABC, [BD] este înălţimea din B, iar [BP este bisectoarea unghiului ABD ($D, P \in AC$). Dacă $m(\angle PBC) = 45^\circ$, demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

**Barem:**

Notăm cu a, b, c măsurile unghiurilor triunghiului.
Deosebim trei cazuri, după cum unghiul A este ascuţit, drept sau obtuz............... **1p**

**a)** Dacă unghiul A este ascuţit, atunci D se află pe semidreapta (AC, iar P este situat pe segmentul (AD). Cum unghiul ABD este ascuţit, rezultă că $m(\angle PBD) < 45^\circ$, prin urmare $D \in (AC)$. ........................................................................................**1p**

Avem:

$$45^\circ = m(\angle PBC) = m(\angle DBC) + m(\angle PBD) = (90^\circ - c) + \frac{1}{2}(90^\circ - a) = 135^\circ - c - \frac{a}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow c + \frac{a}{2} = 90^\circ \Rightarrow 2c + a = 180^\circ \Rightarrow c = b,$ deci ABC este isoscel, cu baza BC..........**2p**

**b)** Dacă unghiul A este drept, atunci D = P = A; în acest caz, avem că $b = 45^\circ$, deci triunghiul ABC va fi dreptunghic isoscel...............................................................**1p**

**c)** Dacă unghiul A este obtuz, atunci D se află pe semidreapta ce se opune lui (AC, iar P este situat pe semidreapta (DA. Atunci $m(\angle PBC) = m(\angle DBC) - m(\angle PBD)$ şi raţionamentul continuă ca în primul caz............................................................**2p**

**CLASA a VI-a**

**Problema 4**

Fie 2011 puncte distincte cu proprietatea că oricare trei sunt necoliniare.

**a)** Care este numărul de drepte determinate de aceste puncte ?

Dacă unim arbitrar punctele între ele astfel încât prin fiecare punct să treacă cel puţin o dreaptă, demonstraţi că :

**b)** Există cel puţin un punct prin care trec un număr par de drepte;

**c)** Numărul punctelor prin care trec un număr par de drepte este impar.

**Barem**:

**d)** Numărul de drepte determinat de cele 2011 puncte este

$\frac{2011 \cdot 2010}{2} = 2011 \cdot 1005 = 2021055$ ........................................................... **2p**

**e)** Fie punctele $A_1$, $A_2$, ...., $A_{2011}$; notăm cu $n_k$ numărul de drepte ce trec prin punctul $A_k$, cu $1 \leq n_k \leq 2011$ şi cu n numărul total de drepte.

Atunci $n = \frac{n_1 + n_2 + .... + n_{2011}}{2} \Leftrightarrow n_1 + n_2 + .... + n_{2011} = 2n$ (*) (pentru că fiecare dreaptă a fost numărată de două ori)............................................................**1p**

Dacă presupunem că toţi $n_k$ sunt impari, atunci $n_1 + n_2 + .... + n_{2011}$ = impar (contradicţie cu (*))................................................................................. **1p**

Finalizare ...........................................................................................**1p**

**f)** Presupunem că numărul de puncte prin care trec un număr par de drepte este par $\rightarrow$ numărul de puncte prin care trec un număr impar de drepte este impar (2011 este impar) $\rightarrow n_1 + n_2 + \cdots + n_{2011}$ = impar

( contradicţie cu (*))............................................................................. **1p**

Finalizare .......................................................................................... **1p**