CONCURSUL NAŢIONAL

„ *LA ŞCOALA CU CEAS*”

Ediţia a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A V-a

1. Se consideră numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_{102}$ astfel încât

$$0 < a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_{102} < 307.$$

a) Câte valori distincte poate lua suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_{102}$?
b) Efectuând toate diferenţele a oricăror două numere vecine, $a_{k+1} - a_k$, arătaţi că una dintre aceste diferenţe se repetă de cel puţin 21 de ori.

Prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

2. Fie mulţimea M = {1; 2; 3; …………..; 2010}.
a) Putem alege 1008 elemente din mulţimea M astfel încât aşezate pe un cerc, suma oricăror două numere vecine să fie divizibilă cu 3? Justificaţi!
b) Putem alege 1008 elemente din mulţimea M astfel încât aşezate pe un cerc, suma oricăror două numere vecine sa fie divizibilă cu 4? Justificaţi!

Prof. Sorana şi Răzvan Dinu, Slobozia

3. a) Să se arate că 999999 este divizibil cu 142857;
b) Să se determine cel mai mic numar natural cu suma cifrelor egala cu 2010;
c) Să se determine restul împărţirii la 14 a numărului determinat la subpunctul **b** .

Prof. Beatrice şi Emil Ciolan, Slatina

4. Fie A = {1, 2, 3, ….., 2010}. O mulţime $B \subset A$ are proprietatea P dacă
B = {a, b, c, d} cu a, b, c, d divizibile cu 134 şi a + b + c + d = 2010.

a) Daţi un exemplu de mulţime B cu proprietatea P;
b) Determinaţi toate mulţimile B care au proprietatea P;
c) Demonstraţi că reuniunea tuturor mulţimilor B care au proprietatea P se poate scrie ca o reuniune de trei mulţimi disjuncte două câte două, având suma elementelor fiecăreia aceeaşi.

Prof.Constantin Bărăscu şi Marin Mazilu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL

„ LA ŞCOALA CU CEAS”

Ediţia a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VI-a

1. a) Să se determine numărul raţional N pentru care este adevărată egalitatea :

$$\frac{6}{5}+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 3}+\frac{6\cdot 4\cdot 2}{5\cdot 3\cdot 1}=\frac{6}{5}\cdot N;$$

b) Să se calculeze suma $S=\frac{2010}{2009}+\frac{2010\cdot 2008}{2009\cdot 2007}+\frac{2010\cdot 2008\cdot 2006}{2009\cdot 2007\cdot 2005}+....+\frac{2010\cdot 2008\cdot ....\cdot 4\cdot 2}{2009\cdot 2007\cdot ....\cdot 3\cdot 1}$.

Prof. Cecilia Deaconescu, Piteşti
Prof. Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

2. Se consideră mulţimea $M=\{a_1,a_2,a_3,.....,a_{2010}\}\subset \mathbf{N}$.
Dacă $a_2^2=a_1\cdot a_3$, $a_3^2=a_2\cdot a_4$, ..., $a_{2009}^2=a_{2008}\cdot a_{2010}$ şi $a_{101}=10^{101}, a_{1001}=10^{1001}$, calculaţi a_{2010}.

Prof. Răzvan Dinu , Slobozia
Prof. Daniela Mihalache, Slobozia

3. În triunghiul ABC, [BD] este înălţimea din B, iar [BP este bisectoarea unghiului ABD $(D,P\in AC)$. Dacă $m(\angle PBC)=45^\circ$ demonstraţi că triunghiul ABC este isoscel.

Prof. Gabriel Popa, Iaşi

4. Fie 2011 puncte distincte cu proprietatea că oricare trei sunt necoliniare.

a) Care este numărul de drepte determinate de aceste puncte ?

Dacă unim arbitrar punctele între ele astfel încât prin fiecare punct să treacă cel puţin o dreaptă, demonstraţi că :

b) Există cel puţin un punct prin care trec un număr par de drepte;

c) Numărul punctelor prin care trec un număr par de drepte este impar.

Prof. Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL

„ *LA ŞCOALA CU CEAS*”

Ediţia a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VII-a

1. Să se determine toate perechile de numere naturale $(d; n)$, $d \geq 2$, $n \geq 2$ cu proprietatea $d \mid (n - 1)^2 + 1$ şi $d \mid (n + 1)^2 - 1$.

Prof. Maria şi Vasile Pop, Cluj

2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 2$, notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Considerăm mulţimea $F = \left\{ \frac{(p-1)!}{p} \middle| p \in \mathbf{N}^* \right\}$, unde p este număr prim.

- **a)** Arătaţi că mulţimea F şi mulţimea numerelor naturale sunt disjuncte.
- **b)** Arătaţi că suma unui număr finit de elemente diferite ale lui F nu este număr natural.

Prof. Gabriela şi Constantin Buşe, Timişoara

3. Fie dreptunghiul ABCD, cu m($\angle$DAC) = 60°, iar (AS bisectoarea unghiului DAC, S $\in$ (DC). Dacă {E} = AS $\cap$ BC, {O} = AC $\cap$ BD, {L} = AD $\cap$ OS, să se arate că:

- **a)** SM || CL, unde {M} = CO $\cap$ BL;
- **b)** patrulaterul ACEL este romb.

Prof. Manea Cosmin şi Petrică Dragoş, Piteşti

4. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 120^\circ$ şi AB = 10 cm.

Se consideră punctele E $\in$ (AB), F $\in$ (AC) astfel încât CF = BE = 4 cm.

Dacă M şi N sunt mijloacele segmentelor [BC], respectiv [EF], calculaţi:

- **a)** $m(\angle BIM)$ unde AB $\cap$ MN = {I};
- **b)** lungimea segmentului [MN].

Prof.Constantin Bărăscu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.

CONCURSUL NAŢIONAL

„ LA ŞCOALA CU CEAS”

Ediţia a XIII-a

Râmnicu Vâlcea, 19.03.2010

CLASA A VIII-a

1. **a)** Demonstraţi că $4p^2+q^2+1>2p(q+1)$ pentru orice $p,\ q \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi cel mai mare $a \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$4p^2+q^2+1 \geq 2ap(q+1),\ \forall p,q \in \mathbf{R}.$$

c) Determinaţi cel mai mare $b \in \mathbf{R}$ astfel încât

$$4p^2+q^2+1 \geq 2bp(q+1),\ \forall p,q \in \mathbf{Z}.$$

prof. Vasile Gorgotă, Rm. Vâlcea

2. Suma a $2n$ numere naturale distincte este mai mică decât $3n^2$. Să se arate că printre acestea există două din ele cu suma $2n + 1$.

Prof. Maria şi Vasile Pop, Cluj

3. Fie BCD un triunghi cu BC = 6 cm, CD = 12 cm şi $m(\angle B)=90^\circ$. Pe ipotenuza (CD) se consideră un punct E astfel încât $BE^2 = CE \cdot ED$. Pe planul triunghiului se ridică o perpendiculară în B pe care se consideră un punct A astfel încât $AB = 6\sqrt{3}$ cm.
Fie F şi G proiecţiile lui B pe AC şi respectiv AE.
a) Să se afle distanţa de la punctul D la dreapta AC.
b) Stabiliţi dacă D, G şi F sunt coliniare.

Prof. Ştefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea

4. Pătratul ABEF de latură “*a*” şi dreptunghiul ABCD sunt situate în plane perpendiculare. Demonstraţi că $d(AC,BF)=\frac{a}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m(\angle(BF,AC))=60^\circ$.

Prof.Constantin Bărăscu şi Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore.