Concursul Interjudeţean de Matematică „Teodor Topan”

Ediţia a V-a, Şimleu Silvaniei – 20 noiembrie 2010

Barem de corectare
Clasa a VI-a

1. Unghiurile adiacente AOB si BOC au proprietatea ca m($\measuredangle$AOB)=3m($\measuredangle$BOC). Aflati masura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB si BOC stiind ca m($\measuredangle$AOC)=160^o.

Andrei Eckstein, Timisoara

Barem:
Daca B este in interiorul $\measuredangle$AOC, atunci m($\measuredangle$AOC)=m($\measuredangle$AOB)+m($\measuredangle$BOC)=4m($\measuredangle$BOC) de unde m($\measuredangle$BOC)=40^0, m($\measuredangle$AOB)=120^o si unghiul cautat are masura 80^o **4p**
Daca B nu e in interiorul $\measuredangle$AOC atunci $\measuredangle$AOB, $\measuredangle$BOC, $\measuredangle$COA sunt unghiuri in jurul unui punct, deci 360^o-160^o=m($\measuredangle$AOB)+m($\measuredangle$BOC)=4m($\measuredangle$BOC) de unde m($\measuredangle$BOC)=50^o, m($\measuredangle$AOB) =150^o si unghiul cautat are masura 100^o **3p**

2. Intr-o familie sunt 6 frati si fiecare are varsta exprimata printr-un numar prim. Aflati varstele celor sase frati, stiind ca fratii mai mari au respectiv cu 2, 6, 8, 12 si 14 ani mai mult decat cel mic.

Barem de corectare :
Fie p varsta fratelui mai mic.
Evident, p este un numar prim impar ………………………………………………………………… ..**1p**
Mai remarcam ca p nu se poate termina in 1 (in caz contrar varsta celui mai mare frate s-ar termina cu cifra 5, deci nu ar fi un numar prim)…………………………………………………………………..............………**2p**
La fel, p nu poate avea ultima cifra 3 (fratele cu 12 ani mai mare nu ar avea varsta un numar prim)………….**1p**
si nici in 7 sau 9…………………………………………………………………………………………………**1p**
Prin urmare, p are ultima cifra 5 si fiind prim, p este 5…………………………………………………………**1p**
Ceilalti frati au respectiv 7, 11, 13, 19 ani………………………………………………………………………**1p**

3.
a) Aflati cel mai mic multiplu de 9 din sirul: 1, 12, 127, 1271, 12712, 127127, 1271271, 12712712,… .
b) Cate cifre are cel de-al 10-lea multiplu de 9 din acest sir ?

Prelucrare, Olimpiada Bosnia-Hertegovina

Barem

a) Termenii sirului care se termina in 1 sunt 1, 1271, 1271271,…. Suma cifrelor celui de-al k-lea termen care se termina in 1 este deci $(k-1)\cdot 10+1=9(k-1)+k$, iar primul care se divide cu 9 se obtine pentru k=9, deci este este al 9-lea termen, adica 1271271271271271271271271 (8 "grupe" de 127, urmate de un 1)……………**1p**

La fel, termenii care se termina in 2 sunt 12, 12712, 12712712…,.iar al k-lea termen are suma cifrelor $10(k-1)+3=9k+(k-7)$. Primul multiplu de 9 se obtine pentru k=7, si este 12712712712712712712 (6 grupe de 127, urmate de 12)………………………………………………………………………………………**1p**

In sfarsit, cel de-al k-lea termen din sir care se termina in 7 este 127127….127 (k grupe de 127) si are suma cifrelor $10k=9k+k$. Primul divizibil cu 9 este 127127127127127127127127127………………………………**1p**

Prin urmare cel mai mic multiplu de 9 din sir este 12712712712712712712. …………………………………**1p**

b) Din solutia de la punctul a) rezulta ca multiplii de 9 din sirul dat care au ultima cifra 1 ocupa in grupa lor locurile 9, 18, 27… si au 25 $(=8\cdot 3+1)$, 52, 79, 106… cifre…………………………………………… **1p**

La fel, multiplii lui 9 care se termina in 2 au , in ordine, $20(=6\cdot 3+2)$, 47 $(=15\cdot 3+2)$, 74, 101… cifre, iar multiplii lui 9 care se termina in 7 au respectiv 27, 54 $(=18\cdot 3)$, 81, 108 …cifre………………………….. **1p**

Prin urmare, multiplii lui 9 din sir au, in ordine, 20, 25, 27, 47, 52, 54, 74, 79, 81, 101, 106, 108, … cifre.
Cel de-al 10-lea are 101 cifre……………………………………………………………………………… **1p.**

4. Fie $A=\overline{abcde1}$, un numar de 6 cifre cu proprietatea ca A se divide cu fiecare din cifrele a,b,c,d,e. Demonstrati ca multimea formata din primele cinci cifre ale lui A are cel mult trei elemente.

Test selectie Pakistan , 2010

Barem de corectare:

Fie M multimea primelor 5 cifre ale lui A.
Observam mai intai primele cinci cifre ale lui A sunt impare, deci M are cel mult 5 elemente……………..**1p**
Apoi, 5 un apartine lui M, deoarece A un se divide cu 5 (deci M are cel mult 4 elemente)…………………..**1p**
Presupunand prin absurd ca M are patru elemente. Atunci M={1, 3, 7, 9}, deci A se divide cu 9………… **2p**
Rezulta ca A are suma cifrelor multiplu de 9…………………………………………… **1p**
Insa suma cifrelor lui A este 1+3+7+9+a+1=21+a, unde a este una din primele cinci cifre ale lui A…………**1p**
Deoarece a este un numar mai mic decat 10, 21+a este un multiplu de 9 mai mic decat 31, deci 21+a=27, deci a=6, absurd. Deci M are cel mult 3 elemente……………………………………………………………..**1p**