

- 1) Care este scrierea sub formă de interval a mulțimii $\{x \in \mathbf{R} | 1 < x < 3\}$
 - a) $(1,3)$
 - b) $[1,3]$
 - c) $[1,3)$
 - d) $(1,3]$
- 2) Câte elemente are mulțimea $(-4,6) \cap \mathbf{Z}$?
 - a) 7
 - b) 8
 - c) 9
 - d) 6
- 3) Care dintre rapoartele de mai jos este echivalent cu $\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$, $\forall x \in \mathbf{R} - \{\pm 1\}$?
 - a) $\frac{x+1}{x-1}$
 - b) $\frac{x-1}{x+1}$
 - c) $\frac{x^2+1}{x-1}$
 - d) $\frac{2x}{x-1}$
- 4) Care este numărul fețelor unui cub?
 - a) 2
 - b) 3
 - c) 4
 - d) 6
- 5) Câte muchii are un cub?
 - a) 8
 - b) 12
 - c) 11
 - d) 10

SUBIECTUL II (40p)

- 1) Calculați $\frac{2}{a+2} + \frac{a}{a+2}$.
- 2) Amplificați cu $a-1$ raportul $\frac{1}{a+1}$.
- 3) Simplificați cu a^2 raportul $\frac{a^2}{a^2+a^3}$.
- 4) Aflați $x \cdot y$ pentru care $a^2 - 4b^2 = (a+xb)(a-yb)$.
- 5) Aflați $a+b$ pentru care $x^2 + 5x + 4 = (x+a)(x+b)$.
- 6) Care este măsura unghiului format de dreptele AA' și BC , din cubul $ABCD A'B'C'D'$?
- 7) Care este măsura unghiului format de dreptele $A'B$ și BC' , din cubul $ABCD A'B'C'D'$?
- 8) Care este perimetrul triunghiului $A'BC'$ din cubul $ABCD A'B'C'D'$ cu latura de $2\sqrt{2} \text{ cm}$?
- 9) Care este măsura unghiului format de dreptele $A'C'$ și BD , din cubul $ABCD A'B'C'D'$?
- 10) Care este valoarea de adevăr a propoziției
"In paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$, $(ABC) \parallel (B'C'D')$?"

SUBIECTUL III (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

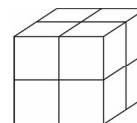
- a) Să se verifice că $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$.
- b) Să se verifice că $(1+x)(1+y)(1+z) = 1+x+y+z+xy+xz+yz+xyz$, $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$.
- c) Să se arate că, dacă $x, y \in \mathbf{R}$ și au același semn, atunci $(1+x)(1+y) \geq 1+x+y$.
- d) Să se arate că, dacă $x, y, z \in [0, \infty)$, atunci $(1+x)(1+y)(1+z) \geq 1+x+y+z$.
- e) Să se arate că, dacă $a \in (0, \infty)$, atunci $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- f) Să se arate că $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.
- g) Să se arate că $2^{a+b+c} \geq 2^a + 2^b + 2^c - 2$, $\forall a, b, c \in \mathbf{N}$.

SUBIECTUL IV (15p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră un cub. Acesta se împarte succesiv în cuburi mai mici, astfel: la prima operație împărțim cubul în 8 cuburi egale, ducând câte un plan paralel cu fețele, ca în figura de mai jos. Eliminăm unul din aceste cuburi. La a doua operație împărțim fiecare din cuburile rămase din prima operație în 8 cuburi egale, ca mai înainte și eliminăm de asemenea din fiecare câte un cub.

Procedeul se continuă în același fel: fiecare nou cub obținut se împarte la rândul lui în 8 cuburi egale și se elimină unul din cuburile noi.

- a) Să se calculeze câte cuburi au rămas după prima operație.
- b) Să se calculeze câte cuburi s-au eliminat la a doua operație.
- c) Să se afle numărul cuburilor care rămân după 3 operații
- d) Să se calculeze câte cuburi s-au eliminat în total în primele 3 operații.
- e) Să se afle numărul cuburilor care rămân după 20 operații.
- f) Să se calculeze câte cuburi s-au eliminat în primele 20 de operații.
- g) Să se arate că, după 2013 operații, rămân mai multe cuburi decât s-au eliminat.



BAREM DE CORECTARE

Oficiu	(10p)
I.(20p)	1. (4p) a); 2. (4p) c); 3. (4p) a); 4. (4p) d); 5. (4p) b);
II.(40p)	1) (4p) 1 2) (4p) $\frac{a-1}{a^2-1}$ 3) (4p) $\frac{1}{1+a}$ 4) (4p) 4 5) (4p) 5 6) (4p) 90° 7) (4p) 60° 8) (4p) 12 9) (4p) 90° 10) (4p) A

SUBIECTUL III

a) Calcul direct.

b) Calcul direct.

c) Din a) $(1+x)(1+y) = 1+x+y+xy \geq 1+x+y \Leftrightarrow xy \geq 0$, adevărat, deoarece x și y au același semn.

d) Rezultă din b).

e) În relația de la punctul d) luăm $x = y = z = a \Rightarrow (1+a)^3 \geq 1+3a$. Apoi

$(1+a)^3(1+a) \geq (1+3a)(1+a) \geq 1+4a$ și așa mai departe obținem $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$.

f) În relația $(1+a)^n \geq 1+na \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$ luăm $a = \frac{1}{n}$ și obținem $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$.

g) Alegem x, y, z astfel ca $1+x = 2^a, 1+y = 2^b, 1+z = 2^c$. Utilizând d), rezultă

$$2^{a+b+c} \geq 1 + (2^a - 1) + (2^b - 1) + (2^c - 1) = 2^a + 2^b + 2^c - 2.$$

SUBIECTUL IV

a) $8-1=7$

b) 7

c) 7^3

d) $1+7+7^2=57$

e) 7^{20}

f) $1+7+7^2+\dots+7^{19} = \frac{7^{20}-1}{6}$

g). Notăm $S = 1+7+7^2+\dots+7^{2012} \Rightarrow 7S = 7+7^2+\dots+7^{2013} \Rightarrow S = \frac{7^{2013}-1}{6} < 7^{2013}$.

Deci $1+7+7^2+\dots+7^{2012} < 7^{2013}$.