

CLASA a VIII-a, SOLUȚII ȘI BAREMURI

Problema 1.

Soluție Deoarece $x^2y^2 + 1 \geq 2xy$, rezultă $x^2 \geq xy$ și analog $y^2 \geq yz$, $z^2 \geq zx$ **3 puncte**

Dacă unul dintre numere, spre exemplu x , ar fi egal cu 0, înlocuind în prima relația am avea $1 = 0$, fals, deci x, y, z sunt nenule. **1 punct**

Atunci $x \geq y \geq z \geq x$, deci $x = y = z$ **2 puncte**

Obținem $x^4 + 1 = 2x^2$, de unde $x = 1$ și apoi $x = y = z = 1$ **1 punct**

Problema 2.

Soluție. Fie k valoarea comună a modulelor. Atunci $a - b = \pm k$, $b - c = \pm \frac{1}{2}k$, $c - d = \pm \frac{1}{3}k$, $d - e = \pm \frac{1}{4}k$ și $e - a = \pm \frac{1}{5}k$ (pentru anumite alegeri a semnelor + și -). **3 puncte**

Dacă $k = 0$, problema este rezolvată. **1 punct**

Pentru $k \neq 0$, prin adunarea relațiilor obținem $0 = (\pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{5})k$, deci $\frac{1}{5} = \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{4}$, pentru o alegere a semnelor. **1 punct**

Pentru orice alegere a semnelor, ultima egalitate revine la $\frac{1}{5} = \frac{m}{12}$, cu m întreg, deci 5 divide 12, contradicție. **2 puncte**

Problema 3.

Soluție. Planele (BFD) și (ABF) se taie după dreapta BF . Muchiile AB și DC sunt perpendiculare pe planul (BCC') , deci și pe dreapta BF . **1 punct**

Dreapta BF este perpendiculară pe DC și pe FC - din ipoteză - deci pe planul (DFC) și implicit pe DF **2 puncte**

Avem $AB \subset (ABF)$, $AB \perp BF$ și $DF \subset (DBF)$, $DF \perp BF$, deci măsura unghiului dintre planele (BFD) și (ABF) este măsura unghiului dintre dreptele AB și DF , adică $\angle FDC$, deoarece $AB \parallel DC$ **2 puncte**

Obținem din relația lui Pitagora că $MC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **1 punct**

În triunghiul dreptunghic FDC avem $\text{tg} \angle FDC = \frac{\sqrt{3}}{3}$, deci măsura unghiului dintre cele două plane este de 30° **1 punct**

Problema 4.

Soluție. a) Dacă prin absurd $|a - 3b| < 1$, din $|a - 3b| \in \mathbb{N}$ obținem $|a - 3b| = 0$ **1 punct**

Atunci $(a^2 - 9b^2)^2 - 33b = -33b \neq 16$ **1 punct**

b) Deoarece $(a - 3b)^2 \geq 1$, avem $16 + 33b = (a^2 - 9b^2)^2 = (a + 3b)^2(a - 3b)^2 \geq (a + 3b)^2 \geq 9b^2$ **1 punct**

De aici rezultă că $b \leq 4$, deoarece $b \geq 5$ implică $9b^2 \geq 45b = 33b + 12b > 33b + 16$ **1 punct**

Atunci b este 0, 1, 2, 3 sau 4 și deci $33b + 16 = 16, 49, 82, 115$ sau 148, respectiv. **1 punct**

Cum $33b + 16$ este pătrat perfect, **1 punct**

rămân doar soluțiile $b = 0$ și $a = 2$ sau $b = 1$ și $a = 4$; în alte cuvinte, vom obține perechile $(a, b) = (2, 0)$, respectiv $(4, 1)$ **1 punct**