



Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

13 februarie 2010

Clasa a V-a

SOLUȚII

Problema 1. Se consideră numerele naturale a, b, c care verifică egalitățile:

$$a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2 \text{ și } a + b = 2010.$$

- Să se compare numerele b și c ;
- Să se calculeze $2 \cdot a + b + c$;
- Să se calculeze $(a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2)$.

Gusta Constanța, profesor, Galați

Soluție :

a) Din $a \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + b^2$, obținem:

$$\left. \begin{array}{l} c \cdot (a+b) = b \cdot (a+b) \\ a+b = 2010 \end{array} \right\} \Rightarrow c = b.$$

b) Din $b = c \Rightarrow 2 \cdot a + b + c = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a+b) = 4020$.

c) Din $b = c \Rightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (b^2 - c^2) \cdot (c^2 + a^2) = 0$.

Problema 2. Să se determine numerele naturale mai mici decât 5000, care au ultima cifră 7 și sunt de forma $7^m + 6^n$, m, n sunt numere naturale.

Guiță Visilina, profesor, Galați

Soluție : $u(6^n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 6, & n \geq 1 \end{cases}$ iar $u(7^m) \in \{1, 7, 9, 3\}$. Pentru a obține ultima cifră 7, convine

numai $u(6^n) = 6$, pentru $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$. Atunci

$u(7^m) = 1 \Rightarrow m$ este multiplu de 4 $\Rightarrow m \in \{0; 4\}$ Pentru $m \geq 8 \Rightarrow 7^8 > 5000$.

I. Dacă $m = 0 \Rightarrow 7^0 = 1$;

Atunci, numerele 6^n care adunate cu 1 să dea un număr mai mic decât 5000 pot fi :
6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt : 7; 37; 217; 1297.

II. Dacă $m = 4 \Rightarrow 7^4 = 2401$;

atunci, numerele 6^n care adunate cu 2401 să dea un număr mai mic decât 5000 sunt:
6; 36; 216; 1296. În acest caz, numerele căutate sunt: 2407; 2437; 2617; 3697. În
concluzie, toate numerele căutate sunt: 7; 37; 217; 1297, 2407; 2437; 2617; 3697.

Problema 3. Se consideră numerele naturale $m = 2009^2 + 2009$ și

$n =$ suma tuturor numerelor de forma $\overline{200c}^{2010}$, unde c este o cifră din sistemul de
numerație zecimal.

- Să se demonstreze că numerele m și n se divid cu 5;
- Să se determine cel mai mare număr natural k astfel încât numărul m să se dividă
cu 7^k ;
- Să se determine câtul și restul împărțirii numărului m la numărul 2747.

Duma Vasile, profesor, Galați

Soluție :a)

$$m = 2009 \cdot 2010 \Rightarrow u(2009 \cdot 2010) = 0 \Rightarrow 5 / m;$$

$$u\left(\overline{200c}^{2010}\right) = u\left(c^2\right) \Rightarrow u(n) = u(0+1+4+9+6+5+6+9+4+1) = 5 \Rightarrow 5 / n.$$

b) Din

$m = 2009 \cdot 2010$, se verifică care din cei doi factori se divide cu 7. Acesta este 2009.

Apoi se verifică dacă 2009 se divide cu 49(A), apoi cu 343(Fals).

Așadar, $k=2$.

c)

$$2747 = 41 \cdot 67 \Rightarrow m = 2009 \cdot 2010 = 7^2 \cdot 41 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67 \Rightarrow m = 2747 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2) \Rightarrow$$

$m = 2747 \cdot 1470 \Rightarrow$ câtul este 1470 și restul este zero.

Problema 4.

- a) Să se determine ultimele două cifre ale produsului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$.
- b) Notăm $a = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2009 \cdot 2010$. Să se demonstreze că numărul $a + 2$ nu este pătrat perfect.

Romeo Zamfir, profesor, Galați

Soluție. a) În produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ există factorii 2, 5 și 10, deci produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ se divide cu 100. Deci, ultimele două cifre ale produsului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13$ sunt 00.

b) Dacă notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, atunci $a = 1! + 2! + 3! + \dots + 2010!$, iar $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$, $8! = 40320$, $9! = 362880$ și 100 divide $n!$, pentru orice $n \geq 10$. Rezultă că numărul natural a are ultimele două cifre 13, iar $a + 2$ are ultimele două cifre 15, de unde rezultă că $a + 2$ nu este pătrat perfect (este cunoscut faptul că dacă un număr natural care are ultima cifră 5 și este pătrat perfect, atunci penultima cifră este egală cu 2)

Observație. Rezultatul din paranteză este cunoscut de elevii din clasa a V-a și el este o consecință a calculului următor

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n 5}^2 = (\overline{a_1 a_2 \dots a_n 0} + 5)^2 = (10 \cdot x + 5)^2 = (10 \cdot x + 5) \cdot (10 \cdot x + 5) = 10 \cdot x \cdot (10 \cdot x + 5) + 5 \cdot (10 \cdot x + 5) = 100 \cdot x^2 + 50 \cdot x + 50 \cdot x + 25 = 100 \cdot x^2 + 100 \cdot x + 25, \text{ unde } x = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

