Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

13 februarie 2010

Clasa a VI-a

SOLUŢII

Problema 1. Să se determine trei numere naturale prime a, b, c care îndeplinesc condiţiile: $(a+b+c)\cdot(5\cdot a+15)=(5\cdot a-4)\cdot(48-c)\cdot b$ şi $a<b<c$.

Manea Marcel, profesor, Galaţi

Soluţie: Dacă toate cele trei numere prime ar fi impare, ar rezulta o contradicţie(număr par = număr impar). Atunci unul este număr par prim. Rezultă a=2. Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obţinem:

$$\left.\begin{array}{l}(2+b+c)\cdot 25=6\cdot(48-c)\cdot b\\ (5,6)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 5/b\Rightarrow b=5\Rightarrow c=23;$$

Dacă 5 nu divide pe $b\Rightarrow 25/(48-c)\Rightarrow c=23\Rightarrow b=5(\mathit{fals})$.

Numerele căutate sunt: 2, 5, 23.

Problema 2. Dacă a, b, c sunt numere raţionale pozitive, diferite de zero şi $\frac{2010}{a+3}+\frac{2010}{b+4}+\frac{2010}{c+5}=2009$, să se calculeze $\frac{a+2}{a+3}+\frac{b+3}{b+4}+\frac{c+4}{c+5}$.

Florin Antohe, profesor , Galaţi

Soluţie :

$$\frac{2010}{a+3}+\frac{2010}{b+4}+\frac{2010}{c+5}=2009\Leftrightarrow\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+4}+\frac{1}{c+5}=\frac{2009}{2010};$$

$$\frac{a+2}{a+3}+\frac{1}{a+3}+\frac{b+3}{b+4}+\frac{1}{b+4}+\frac{c+4}{c+5}+\frac{1}{c+5}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a+2}{a+3}+\frac{b+3}{b+4}+\frac{c+4}{c+5}=3-\frac{2009}{2010}=\frac{4021}{2010}.$$

Problema 3. Fie numărul $A=1234...200820092010$.

a) Să se calculeze suma cifrelor numărului A.

b) Să se stabilească dacă numărul A este pătrat perfect .

c) Să se stabilească câte numere pătrate perfecte se pot obţine schimbând ordinea cifrelor numărului A.

Petre Bătrâneţu, profesor, Galaţi

Soluţie: a). Numărul 1999 este numărul care are suma cifrelor cea mai mare faţă de toate numerele de la 1 la 2010. Numerele naturale mai mici decât 1999 se grupează astfel: $(1;1998),(2;1997),(3;1996),...,(999;1000)$. În fiecare grupă, suma cifrelor este 28. Suma cifrelor celorlalte numere rămase este: 28 pentru numărul 1999, 2 pentru numărul 2000, 3 pentru numărul 2001, ..., 11 pentru numărul 2009, 3 pentru numărul 2010.

Aşadar, suma cifrelor numărului A este :

$999\cdot 28+28+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+3=28068$.

b). Numărul 28068 se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, deci, numărul A nu este pătrat perfect.

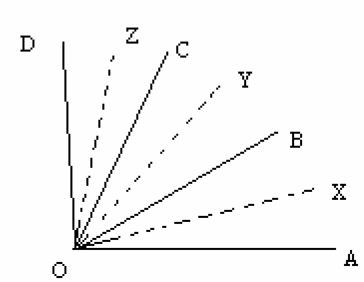
c) Oricum s-ar schimba ordinea cifrelor numărului A, suma cifrelor va rămâne aceeaşi. Rezultă că nu se obţine nici un număr pătrat perfect.

Problema 4. Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB,\ \sphericalangle BOC,\ \sphericalangle COD$ astfel încât unghiurile cu o latură comună sunt adiacente.

Fie $[OX, [OY, [OZ,$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOB,\ \sphericalangle BOC,$ respectiv $\sphericalangle COD$. Ştiind că $m(\sphericalangle XOC)=30^0,\ m(\sphericalangle YOD)=40^0,\ m(\sphericalangle XOB)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle COZ)=25^0$, să se calculeze măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB,\ \sphericalangle BOC,\ \sphericalangle COD$.

Dumitru şi Rodica Bălan, profesori, Galaţi

Soluţie: Notăm $m(\sphericalangle AOB)=a,\ m(\sphericalangle BOC)=b,\ m(\sphericalangle COD)=c.$



Relaţiile date în ipoteză se scriu astfel:

$$m(\sphericalangle XOC)=30^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle XOB)+m(\sphericalangle BOC)=30^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB)+m(\sphericalangle BOC)=30^0 \Leftrightarrow \frac{a}{2}+b=30^0; \tag{1}$$

$$m(\sphericalangle YOD)=40^0 \Leftrightarrow m(\sphericalangle YOC)+m(\sphericalangle COD)=40^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\sphericalangle BOC)+m(\sphericalangle COD)=40^0 \Leftrightarrow \frac{b}{2}+c=40^0; \tag{2}$$

$$m(\sphericalangle XOB)+\frac{1}{2}m(\sphericalangle COZ)=25^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}m(\sphericalangle AOB)+\frac{1}{4}m(\sphericalangle COD)=25^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}+\frac{c}{4}=25^0 \Leftrightarrow \frac{c}{2}+a=50^0. \tag{3}$$

Adunând membru cu membru relaţiile (1), (2) şi (3), obţinem:

$$\frac{a}{2}+b+\frac{b}{2}+c+\frac{c}{2}+a=30^0+40^0+50^0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)+a+b+c=120^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}(a+b+c)=120^0 \Leftrightarrow a+b+c=80^0. \tag{4}$$

Relaţia (2) se scrie astfel: $\frac{b}{2}+c=40^0 \Leftrightarrow b+2c=80^0$ şi cum din relaţia (4) avem $a+b+c=80^0$, obţinem $2c=a+c$, de unde $c=a$.

Înlocuind $c=a$ în relaţia (3), obţinem

$\frac{a}{2}+a=50^0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a=50^0 \Leftrightarrow a=\frac{100^0}{3}=33^0 20`$. Rezultă $c=a=33^0 20`$.

Relaţia (4) devine $b+66^0 40`=80^0$, de unde $b=80^0-66^0 40`=13^0 20`$.

Aşadar, $m(\sphericalangle AOB)=a=33^0 20`$, $m(\sphericalangle BOC)=b=13^0 20`$,

$m(\sphericalangle COD)=c=33^0 20`$.