Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

13 februarie 2010

Clasa a VII-a

SOLUŢII

Problema 1. Ştiind că numărul raţional $\mathrm{r}=\overline{0,abc(d)}+\overline{0,bad(c)}+\overline{0,cda(b)}+\overline{0,dcb(a)}$ este fracţie zecimală finită, să se demonstreze că $\mathrm{r}\in\mathbb{N}$.

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Soluţie: Condiţii**:** $a,b,c,d\notin\{9\}$**.**

$$\overline{0,abc(d)}=\frac{\overline{abcd}-\overline{abc}}{9000}=\frac{900\cdot a+90\cdot b+9\cdot c+d}{9000};\ \overline{0,bad(c)}=\frac{\overline{badc}-\overline{bad}}{9000}=\frac{900\cdot b+90\cdot a+9\cdot d+c}{9000};$$

$$\overline{0,cda(b)}=\frac{\overline{cdab}-\overline{cda}}{9000}=\frac{900\cdot c+90\cdot d+9\cdot a+b}{9000};\ \overline{0,dcb(a)}=\frac{\overline{dcba}-\overline{dcb}}{9000}=\frac{900\cdot d+90\cdot c+9\cdot b+a}{9000}$$

$$\mathrm{r}=\frac{1000\cdot(a+b+c+d)}{9000}\Leftrightarrow \mathrm{r}=\frac{a+b+c+d}{9};$$

Din ipoteză, r este fracţie zecimală finită. Atunci

$$\left.\begin{array}{l} a+b+c+d=9\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \\ \max(a+b+c+d)<36 \end{array}\right\}\Rightarrow\ 9\cdot k\in\{0,9,18,27\}\Rightarrow k\in\{0,1,2,3\}.$$ Rezultă $r\in\{0,1,2,3\}\subset\mathbb{N}$.

Problema 2. Câte numere naturale de forma $A=\frac{7\cdot n+4}{5\cdot n+3}+\frac{13\cdot m+8}{5\cdot m+3}$, $m,n\in\mathbb{N}^*$, există?

Petre Bătrâneţu, profesor, Galaţi

Soluţie: Vom arăta că dacă $\frac{a}{b}$ şi $\frac{c}{d}$ sunt fracţii ireductibile şi $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\in\mathbb{N}$ atunci $b=d$.

Într-adevăr, $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\in\mathbb{N}\Rightarrow b\cdot d\,/\,a\cdot d+b\cdot c.$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,a\cdot d+b\cdot c \\ b\cdot d\,/\,b\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,a\cdot b\cdot d+b^2\cdot c \\ b\cdot d\,/\,a\cdot b\cdot d \end{array}\right.\Rightarrow b\cdot d\,/\,b^2\cdot c.$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,b^2\cdot c \\ (c,d)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow d\,/\,b.\ (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,a\cdot d+b\cdot c \\ b\cdot d\,/\,b\cdot d \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,a\cdot d^2+b\cdot c\cdot d \\ b\cdot d\,/\,c\cdot b\cdot d \end{array}\right.\Rightarrow b\cdot d\,/\,a\cdot d^2$$

$$\left.\begin{array}{l} b\cdot d\,/\,a\cdot d^2 \\ (a,b)=1 \end{array}\right\}\Rightarrow b\,/\,d.\ (2)$$

Din (1) si $(2) \Rightarrow b = d$.

Să demonstrăm că $(7 \cdot n + 4,\ 5 \cdot n + 3) = 1$ şi $(13 \cdot m + 8,\ 5 \cdot m + 3) = 1$.

Fie $p \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\left.\begin{array}{l} p / 7 \cdot n + 4 \\ p / 5 \cdot n + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p / 35 \cdot n + 20 \\ p / 35 \cdot n + 21 \end{array}\right\} \Rightarrow p / 1 \Rightarrow p = 1 \Rightarrow (7 \cdot n + 4, 5 \cdot n + 3) = 1.$$

Fie $q \in \mathbb{N}^*$, astfel încât

$$\left.\begin{array}{l} q / 13 \cdot m + 8 \\ q / 5 \cdot m + 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} q / 65 \cdot m + 40 \\ q / 65 \cdot m + 39 \end{array}\right\} \Rightarrow q / 1 \Rightarrow q = 1 \Rightarrow (13 \cdot m + 8, 5 \cdot m + 3) = 1.$$

Dar

$A \in \mathbb{N} \Rightarrow 5 \cdot n + 3 = 5 \cdot m + 3 \Rightarrow m = n.$ Deci $A = \dfrac{7 \cdot n + 4}{5 \cdot n + 3} + \dfrac{13 \cdot n + 8}{5 \cdot n + 3} = \dfrac{20 \cdot n + 12}{5 \cdot n + 3} = 4 \in \mathbb{N}.$

Aşadar, există un singur număr natural $A = 4$.

Problema 3. Să se compare numerele:

$$A = \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + ... + \frac{1}{1002} + \frac{1}{1003} \quad \text{şi} \quad B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006}.$$

Romeo Zamfir, profesor, Galaţi

Soluţie. Avem că

$$B = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2005} - \frac{1}{2006} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2006} \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} .... + \frac{1}{1003} \right) = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + ... + \frac{1}{2006}.$$

Deci, $B = \dfrac{1}{1004} + \dfrac{1}{1005} + ... + \dfrac{1}{2006}$ şi

$$A = \frac{1}{502} + \frac{1}{503} + ... + \frac{1}{1003} = \frac{2}{1004} + \frac{2}{1006} + ... + \frac{2}{2006}.$$

Prin urmare,

$$A = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1004} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1008} + ... + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2006} \quad \text{şi}$$

$$B = \frac{1}{1004} + \frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \frac{1}{1008} + \frac{1}{1009} + ... + \frac{1}{2004} + \frac{1}{2005} + \frac{1}{2006}$$

Comparând termen cu termen, obţinem că $A > B$.

Problema 4.

a) În exteriorul triunghiului $\triangle ABD$ se construiesc:

$AE \perp AB,\ [AE] \equiv [AB],\ AH \perp AD,\ [AH] \equiv [AD].$

Fie $M \in [BE],\ [MB] \equiv [ME], N \in [DH], [DN] \equiv [NH],\ O \in [BD],\ [OB] \equiv [OD]$ şi DE$\cap$BH=$\{R\}$.

Să se demonstreze că: i) $BH \perp DE,\ [BH] \equiv [DE]$;

ii) $[OM] \equiv [ON]$ şi $OM \perp ON$;

b) Pe laturile paralelogramului ABCD se construiesc în exteriorul acestuia $AE \perp AB,\ [AE] \equiv [AB],\ CF \perp CB,\ [CF] \equiv [CB]$, CG$\perp$CD, $[CG] \equiv [CD]$ şi $AH \perp AD,\ [AH] \equiv [AD]$.

Dacă M, N, P, Q sunt mijloacele segmentelor $[BE]$, $[DH]$, $[DG]$ şi respectiv $[BF]$, să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este pătrat.

Petre Bătrâneţu, profesor, Galaţi

Soluţie: a)

i) $\triangle ADE \equiv \triangle AHB (L.U.L) \Rightarrow [DE] \equiv [BH], \sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle AHB.$ Fie $AD \cap HR = \{S\}$.

Triunghiurile

$\triangle HAS$ si $\triangle DRS$ au: $\measuredangle ADE \equiv \sphericalangle AHB$ şi $\sphericalangle HSA \equiv \sphericalangle DSR$ ($\sphericalangle - uri$ opuse la vârf).

Rezultă $m(\sphericalangle HAD) = m(HRD) = 90° \Rightarrow BH \perp DE.$

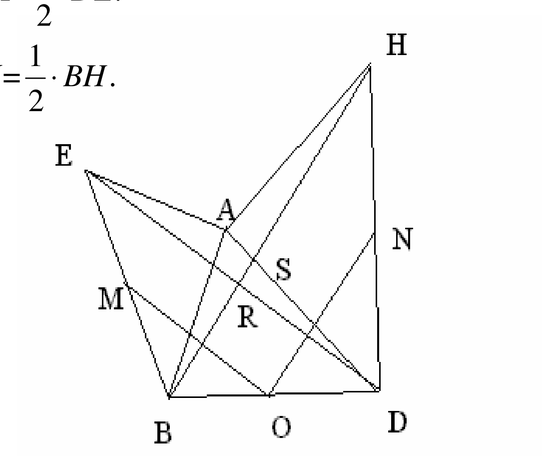
ii) În triunghiul

$\triangle DEB$, OM este linie mijlocie $\Rightarrow$ OM || DE şi OM=$\frac{1}{2} \cdot DE$.

$\triangle DBH$, ON este linie mijlocie $\Rightarrow$ ON || BH şi ON=$\frac{1}{2} \cdot BH$.

Dar $[DE] \equiv [BH] \Rightarrow [OM] \equiv [ON]$;

BH$\perp$DE$\Rightarrow$OM$\perp$ON.



b) Se aplică punctele i) şi ii) triunghiurilor:

$\triangle ABD \Rightarrow [DE] \equiv [BH],\ [OM] \equiv [ON]$ şi OM $\perp$ ON;

$\triangle$BCD $\Rightarrow [DF] \equiv [BG],\ [OP] \equiv [OQ]$ şi OP $\perp$ OQ.

$\triangle ADE \equiv \triangle CBG\,(L.U.L.) \Rightarrow [DE] \equiv [BG]$

$\triangle ABE \equiv \triangle CDG\,(L.U.L.) \Rightarrow [BE] \equiv [DG]$

$\left.\begin{array}{l}[DE] \equiv [BG]\\ [BE] \equiv [DG]\end{array}\right\} \Rightarrow$ EBGD paralelogram $\Rightarrow$ BE || DG, $[BE] \equiv [DG]$;

$OM = \frac{1}{2} \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot BG = OP;$

$\left.\begin{array}{l}OM \parallel DE\\ OP \parallel BG\\ DE \parallel BG\end{array}\right\} \Rightarrow M, O, P$ coliniare. Analog, punctele N,O,Q, sunt coliniare.

Rezultă că patrulaterul MNPQ este pătrat.