Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

Problema 1. Fie $x \in \mathbb{R}$. Numerele $[x]$ şi $\{x\}$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,1 şi respectiv 0,2 şi verifică egalitatea

$$\sqrt{3} \cdot [x] + \sqrt{2}^3 \cdot \{x\} = \left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{41}\right]^{7^2} \cdot \left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{134}\right]^{15}.$$

Dacă $n = \left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^0 + \left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^1 + \left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^2 + \ldots + \left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^{2009}$, atunci n este un număr natural divizibil cu 67.

($[x]$ şi $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x).

Vasile Duma, profesor, Galaţi

Problema 2. Dacă a şi b sunt numere naturale impare, atunci $\sqrt{a^2+b^2+4} \notin \mathbb{Q}$.

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Problema 3. Fie $a,\ b > 0$. Să se demonstreze inegalităţile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$;

b) $2 \cdot \left(a^3 + 1 + a^3 \cdot b^3\right) \geq a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b + a^2 + a$.

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Problema 4. Pe planul pătratului $ABCD$, $AB = a$, se ridică perpendiculara AP. Se consideră punctele $M \in [BC]$, $N \in [CD]$, $BM = CN = \frac{a}{3}$, iar $AM \cap BN = \{E\}$.

Fie punctul $Q \in [AE]$, $\frac{AQ}{QE} = \frac{1}{2}$.

Să se determine lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât măsura unghiului diedru determinat de planele (PQD) şi (ABC) să fie de $60°$.

Manuela Totolici, profesor, Galaţi

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.