Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

13 februarie 2010

Clasa a VIII-a

SOLUȚII

Problema 1. Fie $x\in\mathbb{R}$**. N**umerele $[x]$ şi $\{x\}$ sunt invers proporţionale cu numerele 0,1 şi respectiv 0,2 şi verifică egalitatea

$$\sqrt{3}\cdot[x]+\sqrt{2}^{3}\cdot\{x\}=\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{41}\right]^{7^2}\cdot\left[\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{134}\right]^{15}.$$

Dacă $n=\left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^{0}+\left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^{1}+\left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^{2}+...+\left(x-\sqrt{2}^{-2}\right)^{2009}$, atunci n este un număr natural divizibil cu 67.($[x]$şi $\{x\}$reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real x).

Duma Vasile, profesor, Galaţi

Soluţie : $\dfrac{[x]}{\dfrac{1}{0,1}}=\dfrac{\{x\}}{\dfrac{1}{0,2}}\Rightarrow\dfrac{[x]}{10}=\dfrac{\{x\}}{5}\Rightarrow[x]=2\cdot\{x\}$.Înlocuind în ipoteză, obţinem:

$$2\cdot\sqrt{3}\cdot\{x\}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\{x\}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{2009}\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{2010}\Leftrightarrow 2\cdot\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\{x\}=\sqrt{3}+\sqrt{2}\Rightarrow\{x\}=0,5$$

Atunci $[x]=1\Rightarrow x=1,5$.

$$n=\underbrace{1+1+1+...+1}_{\text{de 2010 ori}}\Rightarrow n=2010=2\cdot3\cdot5\cdot67\Rightarrow 67\mid n.$$

Problema 2. Dacă a şi b sunt numere naturale impare, atunci $\sqrt{a^2+b^2+4}\notin\mathbb{Q}$.

Viorica Bujor, profesor, Galaţi

Soluţie: Presupunem că $\sqrt{a^2+b^2+4}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\exists c\in\mathbb{N}^*,\ a^2+b^2+4=c^2$ **.**

Din a, b numere naturale impare, fie $a=2\cdot k+1$ şi $b=2\cdot p+1,\ k,p\in\mathbb{N}$**.**

Atunci**,** $a^2+b^2+4=2\cdot\left[2\cdot\left(k^2+k+p^2+p+1\right)+1\right]$ (1).

Folosind (1), rezultă că 2 divide pe $c^2\Rightarrow$ 2 divide pe c şi deci $c^2=4\cdot d^2$ $,d\in\mathbb{N}^*$.

Înlocuind în (1), obţinem

$2d^2 = 2\left(k^2 + k + p^2 + p + 1\right) + 1$, adică un număr par egal cu un număr impar (contradicţie!)

Deci $\sqrt{a^2 + b^2 + 4} \notin \mathbb{Q}$.

Problema 3. Fie $a,\ b > 0.$ Să se demonstreze inegalităţile:

a) $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$;

b) $2 \cdot \left(a^3 + 1 + a^3 \cdot b^3\right) \geq a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2 + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b + a^2 + a$**.**

Vasile Popa, profesor, Galaţi

Soluţie : a)

$$a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2 \Leftrightarrow (a+b)\cdot\left(a^2 - a\cdot b + b^2\right) \geq a \cdot b \cdot (a+b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\cdot\left(a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2\right) \geq 0 \Leftrightarrow (a+b)\cdot(a-b)^2 \geq 0, \text{adevarat.}$$

b) Conform punctului a), avem:

$a^3 + 1 \geq a^2 + a;$
$a^3 \cdot b^3 + 1 \geq a^2 \cdot b^2 + a \cdot b;$
$a^3 + a^3 \cdot b^3 = a^3 \cdot \left(1 + b^3\right) \geq a^3 \cdot \left(b + b^2\right) = a^3 \cdot b + a^3 \cdot b^2.$

Adunând membru cu membru inegalităţile de mai sus, obţinem relaţia din enunţ.

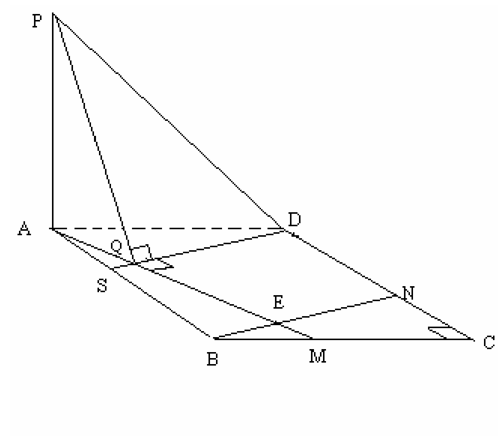
Problema 4. Pe planul pătratului $ABCD$**,** $AB = a,$ se ridică perpendiculara $AP.$ Se consideră punctele $M \in [BC],\ N \in [CD],\ BM = CN = \frac{a}{3},$ iar $AM \cap BN = \{E\}.$

Fie punctul $Q \in [AE],\ \frac{AQ}{QE} = \frac{1}{2}.$

Să se determine lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât măsura unghiului diedru determinat de planele (PQD) şi (ABC) să fie de $60°$.

Manuela Totolici, profesor, Galaţi

Soluţie : Construim $QS \parallel EB,\ S \in AB.$



Conform teoremei lui Thales, rezultă că

$\frac{AS}{SB} = \frac{1}{2},\ \frac{AS}{AB} = \frac{1}{3},$

de unde rezultă că

$AS = \frac{a}{3},\ SB = \frac{2 \cdot a}{3} = DN,$ de unde rezultă că

patrulaterul $DNBS$ este paralelogram, deci

$DS \parallel NB,$ adică punctele D, Q, S sunt coliniare.

Din $\triangle ASD \equiv \triangle BMA \Rightarrow m(\measuredangle ADS) = m(\measuredangle BAM) = 90° - m(DAQ),$ de unde rezultă

că triunghiul AQD este dreptunghic în Q, deci $AQ \perp DS.$ Din teorema celor

trei perpendiculare rezultă că $PQ \perp DS,$ deci $m\left[\measuredangle\left((PDQ),(ABC)\right)\right] = m(\measuredangle PQA) = 60°$

şi deci $tg(\measuredangle PQA) = \frac{AP}{AQ} = \sqrt{3}.$

$\triangle AQS \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{AS}{AM} \Rightarrow AQ = \frac{a \cdot \sqrt{10}}{10} \Rightarrow AP = AQ \cdot \sqrt{3} = \frac{a \cdot \sqrt{30}}{10}.$