

BAREM DE CO RECTARE – clasa a V-a, 13.02.2010

- I. Se acordă din oficiu** 1p
 $a = 3^{26}$ 3p
 $b = (2^{101} : 2^{100}) \cdot 2^{38} = 2^{39}$ 3p
 $a = 9^{13} > 8^{13} = b$ 3p

TO TAL: 10p

- II. Se acordă din oficiu** 1p
Notăm cu n numărul obținut prin ștergerea ultimei cifre.
Numărul inițial este $N=10n$, deci $9n=72504$. 6p
Rezultă $n=8056$ și $N=80560$ 3p

TO TAL: 10p

- III. Se acordă din oficiu** 1p

a) După cea de-a 3-a săritură broscuțele se găsesc pe pozițiile (4, 7, 12),
apoi pe pozițiile (7, 12, 20), (12, 20, 33),
iar după cea de-a a șasea pe pozițiile (20, 33, 54)

(se observă că dacă broscuțele ocupă pozițiile a, b, c , atunci $c=a+b+1$) 5p

b) Broscuța de pe primul loc se află pe axă în dreptul numărului 2583, care este impar. Observăm că după fiecare săritură numărul care indică poziția unei broscuțe pe axa numerelor crește cu un număr par, deci paritatea pozițiilor inițiale nu se modifică pe parcurs (adică o broscuță se află în orice moment pe un număr de aceeași paritate cu cel de pe poziția inițială). Deoarece Oac este singura broscuță aflată la început pe o poziție impară, ea este broscuța de pe primul loc 4p

TO TAL: 10p

- IV. Se acordă din oficiu** 1p

a) Notăm cu b numărul băieților și cu f numărul fetelor.

Primul băiat aduce $4+1$ flori, al doilea $4+2$ flori, etc, iar ultimul $4+b$ flori, deci $4+b=f$ 3p

Cum $b+f=148$, rezultă că $b=72, f=76$ (3p)

b) Numărul de flori este $5+6+\dots+76=81+81+\dots+81$ (36 de termeni) $=36 \cdot 81 = (6 \cdot 9)^2$ 3p

TO TAL: 10p

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se punctează echivalent !

BAREM DE CORECTARE-clasa a VI-a, 13.02.2010

- I. Se acordă din oficiu 1p
- a) $p = \text{prim}; p > 6 \Rightarrow u(p) = \{1; 3; 7; 9\}$ 1p
- $u(p) = 1 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 3 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 7 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(p) = 9 \Rightarrow u(p^4) = 1$ 2p
- $\Rightarrow u(p^4) = 1$ 0,5p
- b) Cazul 1: $p > 6; q > 6 \Rightarrow$ nu avem soluții 0,5p
- Cazul 2: $p < 6; q < 6 \Rightarrow$ nu avem soluții 0,5p
- Cazul 3: $p > 6; q < 6 \Rightarrow u(p^4) = 1; u(29186) = 6 \Rightarrow u(q^4) = 5$ 1p
- $q = \text{prim} \Rightarrow q = 5 \Rightarrow q^4 = 625$ 1p
- $\Rightarrow p^4 = 28561$ 0,5p
- $\Rightarrow p^4 = 13^4$ 1p
- $\Rightarrow p = 13$ 1p

TOTAL: 10p

- II. Se acordă din oficiu 1p
- Presupunem: $a = dx$ și $b = dy \Rightarrow (a, b) = d$ și $(x, y) = 1$ 1p
- Relatia $[a, b] - (ab) = 34$ devine $dxy - d = 34 \Rightarrow d(xy - 1) = 34$ 1p
- $\Rightarrow d \in \{1; 2; 17; 34\}$ 1p
- Pt. $d = 1 \Rightarrow (a; b) \in \{(1; 35), (35; 1), (5; 7), (7; 5)\}$ 1,5p
- Pt. $d = 2 \Rightarrow (a; b) \in \{(2; 36), (36; 2), (4; 18), (18; 4)\}$ 1,5p
- Pt. $d = 17 \Rightarrow (a; b) \in \{(17; 51), (51; 17)\}$ 1,5p
- Pt. $d = 34 \Rightarrow (a; b) \in \{(34; 68), (68; 34)\}$ 1,5p

TOTAL: 10p

- III. Se acordă din oficiu 1p

Avem $A_1 A_2 = 1$

$$A_2 A_3 = \frac{3}{10} \cdot A_1 A_2 = \frac{3}{10} \cdot 1 = \frac{3}{10} \dots\dots\dots 0,5p$$

$$A_3 A_4 = \frac{3}{10} \cdot A_2 A_3 = \left(\frac{3}{10}\right)^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$A_4 A_5 = \frac{3}{10} \cdot A_3 A_4 = \left(\frac{3}{10}\right)^3 \dots\dots\dots 0,5p$$

...

$$A_n A_{n+1} = \frac{3}{10} \cdot A_{n-1} A_n = \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_{n+1} = 1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$$

Notăm $S = 1 + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1} \dots\dots\dots 1p$

$$\frac{3}{10} S = \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{10}\right)^n \dots\dots\dots 1p$$

$$S - \frac{3}{10} S = 1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n < 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10} S < 1 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow S < \frac{10}{7} \Rightarrow A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 + \dots + A_n A_{n+1} < \frac{10}{7} \dots\dots\dots 1p$$

TOTAL: 10p

- IV. Se acordă din oficiu 1p

a) justifică $\angle B \cong \angle C$ 0,5p

justifică $[AC] \cong [BM]$ 0,5p

$\Delta ACM \cong \Delta MBN \Rightarrow [AM] \cong [BM]$ 1p

finalizare 0,5p

b) justifică $m(\angle ACM) = m(\angle ABC) = 45^\circ$ 0,5p

$\Rightarrow m(\angle QCM) = 135^\circ$ 0,5p

$[MC] \cong [QC] \Rightarrow \Delta MCQ = \Delta isoscel$ 1p

justifică $m(\angle CQM) = m(\angle CMQ) = 22^\circ 30'$ 1p

$m(\angle CAM) = m(\angle NMB) = x \Rightarrow m(\angle MAN) = m(\angle MNA) = 90^\circ - x$ 1p

$\Rightarrow m(\angle MNB) = 90^\circ + x$ 0,5p

$m(\angle BMN) + m(\angle MNB) + m(\angle NBM) = 180^\circ$ 0,5p

$\Rightarrow m(\angle NMB) = 22^\circ 30'$ 0,5p

$\Rightarrow m(\angle NMB) = m(\angle CMQ) \Rightarrow BC \cup NQ = \{M\}$ 0,5p

$\Rightarrow N, M, Q$ coliniare 0,5p

TOTAL: 10p

BAREM DE CORECTARE – clasa a VII-a, 13.02.2010

- I. Se acordă din oficiu** 1p
- a) Dacă $n = \text{par}$, u.c. $= u(9+4)=3$ (1) 1p
 Dacă n , impar, U.C= $u(1+6)=7$ (2) 1p
 Din (1) și (2) $\Rightarrow 19^{n+1} + 74^{n+1}$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow a$ este irațional 1p

- b) $5x^3 + 2x^2y = 2y^3 + 5xy^2 \Leftrightarrow (5x^3 - 5xy^2) + (2x^2y - 2y^3) = 0$
 și obține $(x^2 - y^2)(5x + 2y) = 0$ 2p
 Deduce $x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm x$ 1p

sau $5x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5x}{2}$ 1p

Analizează: $y = x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x + 4y}{4x + 3y} = \dots = 1 \in \mathbf{Z}$ 0,5p

$y = -x \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x + 4y}{4x + 3y} = \dots = -1 \in \mathbf{Z}$ 0,5p

$y = -\frac{5x}{2} \in \mathbf{R}^* \Rightarrow \frac{3x + 4y}{4x + 3y} = \dots = 2 \in \mathbf{Z}$ 1p

TOTAL 10p

- II. Se acordă din oficiu** 1p

- a) Din motive de simetrie, putem presupune că cel mai mic dintre numere este a.

Dacă $a \neq 0$, atunci $\frac{a}{b+c+d} \leq \frac{a}{a+a+a} = \frac{1}{3}$, imposibil. Deci $a = 0$ 2p

Numerele $\frac{b}{c+d}$, $\frac{c}{d+b}$, $\frac{d}{b+c}$ trebuie să fie naturale 1p

Putem presupune că $b \leq c$ și $b \leq d$. Dacă $b \neq 0$, atunci $\frac{b}{c+d} \leq \frac{b}{b+b} = \frac{1}{2}$, imposibil. Deci $b = 0$ 1p

Cum $\frac{c}{d}$ și $\frac{d}{c}$ sunt naturale, trebuie ca $c = d (\neq 0)$ 1p

b) $\sqrt{2009 \cdot 2010} < \sqrt{2010 \cdot 2010}$ 1p

$\sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} < \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2010 \cdot 2010}$ 1p

$\sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2009 \cdot 2010} + 2010 = \sqrt{2009 \cdot 2010} + \sqrt{2010 \cdot 2010} = \sqrt{2010 \cdot 2010} = 2010$ 2p

TOTAL 10p

- III. Se acordă din oficiu** 1p

a) $MN \parallel BC, EF \parallel MN$ iar $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3} = \frac{QE}{EC} \Rightarrow AQ \parallel BC$ (1) 2p

Analog $\frac{AF}{FC} = \frac{RF}{FB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AR \parallel BC$ (2) 2p Din (1) și (2) $\Rightarrow Q, A, R$ coliniare. 1p

b) În triunghiul BEF, $MD \parallel EF \Rightarrow \frac{BM}{ME} = \frac{BD}{DF} = \frac{2}{1}$ 1p $\Rightarrow BD = 2DF$ adică $DF = \frac{FB}{3} \Rightarrow DF = RF$ 2p

Analog $HE = EQ$, deci D - mijlocul lui [BR], iar H - mijlocul lui [CQ]. 1p

TOTAL 10p

- IV. Se acordă din oficiu** 1p

- a) Notăm $\{O\} = MT \cap AR$ și (EF) linie mijlocie în trapez.
 În triunghiul OEF avem $EF < OE + OF$ 1p

$EF = \frac{MT + MA}{2}$ 1p $OE = \frac{RM}{2}$ și $OF = \frac{TA}{2}$ 1p

$\Rightarrow RT + MA < RM + TA$ 1p

b) [RO] - înălțime și bisectoare în $\Delta MRT \Rightarrow [MR] \equiv [RT]$ (1) 1p

$\angle TRA \equiv \angle RAM$ (alt.int.) și $\angle TRA \equiv \angle ARM \Rightarrow \angle RAM \equiv \angle ARM \Rightarrow \Delta AMR$ isoscel cu $[RM] \equiv [AM]$ (2) 2p

(1)

Din (1) și (2) $\Rightarrow [RT] \equiv [MA]$ și cum $MA \parallel RT \Rightarrow MATR$ este paralelogram 1p $\Rightarrow MATR$ este romb. 1p

TOTAL 10p

I. Se acordă din oficiu1p a) Din inegalitatea $k^2 < k(k+1) < (k+1)^2, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow [\sqrt{k(k+1)}] = k$ 1p

Deci $n = 1 + 2 + \dots + 2009 = \frac{2009 \cdot 2010}{2} = 2009 \cdot 1005$ 1p

$$\frac{2\sqrt{11+6\sqrt{2}}}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \frac{2(3+\sqrt{2})}{(3x+2)(3+\sqrt{2})} = \frac{2}{3x+2}$$
1p

$3x+2 \mid 2 \Rightarrow A = \{0, -1\} \Rightarrow \text{card}A = 2$ 1p

$2^{2009 \cdot 1005} > 2^{42} = (2^{11} \cdot 2^{10})^2 = (2048 \cdot 1024)^2 > (2009 \cdot 1005)^2 \Rightarrow m^n > n^m$ 1p

b) Notăm $6n+7 = k^2$ și $9n+1 = (k+1)^2, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \frac{k^2-7}{6}$, respectiv $n = \frac{(k+1)^2-1}{9}$.1p

$\Rightarrow \frac{k^2-7}{6} = \frac{(k+1)^2-1}{9} \Leftrightarrow k^2-4k-21=0$ 1p

Din $(k-7)(k+3)=0$ obținem soluțiile $k \in \{-3; 7\}$ 1p

Pentru $k = -3$ se obține $n \notin \mathbb{N}$ (nu convine condiției din enunț) 0,5p
 Pentru $k = 7$ se obține $n = 7$ 0,5p

TOTAL 10p

II. Se acordă din oficiu1p a) $a = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}}}} < \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}}} =$
 $= \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{25}}} = \sqrt{20 + \sqrt{25}} = \sqrt{25} = 5$ 2p

$b = \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30}}}} < \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{36}}}} =$
 $= \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{36}}} = \sqrt{30 + \sqrt{36}} = \sqrt{36} = 6$ 2p $\Rightarrow a + b < 11$ 1p

b) $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$ 1p

$E(x, y) = (5 - 2y)^2 + y^2 = 25 - 20y + 5y^2 = 5(5 - 4y + y^2) = 5[1 + (2 - y)^2]$ 2p

$\min E(x, y) = 5$ (și se obține pentru $y = 2$ și $x = 1$)1p

TOTAL 10p

III. Se acordă din oficiu1p Desen1p

a) Fie M' – mijlocul laturii $[BC]$. Atunci $\frac{M'G_1}{M'A} = \frac{M'G_2}{M'D} = \frac{1}{3}$ 2p

Din reciproca teoremei lui Thales în $\Delta M'AD \Rightarrow G_1G_2 \parallel AD$ 1p

b) Prin metoda reducerii la absurd (sau cu lema “acoperișului”) arată că

$d \parallel G_1G_2 \parallel AD$ 2p $M \notin (ABC), M \in d \Rightarrow d \not\subset (ABC)$ 1p

Din $d \parallel AD$ și $AD \subset (ABC) \Rightarrow d \parallel (ABC)$ 2p

TOTAL 10p

IV. Se acordă din oficiu1p Desen1p

a) Dacă $BM \perp AC, M \in (AC) \Rightarrow$ din teorema celor 3 perpendiculare $B'M \perp AC$.

Dacă $BQ \perp B'M$, conform reciprocei a doua teoremei celor 3 perpendiculare

$\Rightarrow BQ \perp (AB'C) \Rightarrow BQ = d[B, (AB'C)]$.2p

$AC = \sqrt{a^2 + b^2}, BM = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, B'M = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 1p

$\Rightarrow BQ = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}$ 1p

b) $[A'O_1] \equiv [DO_2] \equiv [C'O_3] \Leftrightarrow b^2 + \frac{a^2 + c^2}{4} = a^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} = c^2 + \frac{a^2 + b^2}{4}$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ paralelipipedul este cub (1)..2p $BD' = \sqrt{ab + ac + bc} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$ paralelipipedul este cub (2).. 1p Cele două afirmații sunt echivalente din (1) și (2).....1p

TOTAL 10p