

BACALAUREAT 2008
SESIUNEA IULIE

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Fie fracția zecimală periodică $0, (769230) = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$. Să se calculeze $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2008}$.
2. Să se arate că dreapta de ecuație $y = 2x - 1$ nu intersectează parabola de ecuație $y = x^2 + x + 1$.
3. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\log_2 x + \log_4 x^2 = 6$.
4. Într-o clasă sunt 25 de elevi dintre care 13 sunt fete. Să se determine numărul de moduri în care se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine a pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
6. Știind că $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ și că $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

SUBIECTUL II

1. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Se notează cu X^t transpusa unei matrice pătratice X și cu $\operatorname{Tr}(X)$ suma elementelor de pe diagonala principală a matricei X .
 - a) Să se demonstreze că $\operatorname{Tr}(A + A^t) = 2\operatorname{Tr}(A)$.
 - b) Să se demonstreze că dacă $\operatorname{Tr}(A \cdot A^t) = 0$, atunci $A = O_2$.
 - c) Să se demonstreze că dacă suma elementelor matricei $A \cdot A^t$ este egală cu 0, atunci $\det(A) = 0$.
2. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $K = \{aI_2 + bA \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$.
 - a) Să se arate că $A^2 \in K$.
 - b) Să se arate că mulțimea K este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.
 - c) Să se arate că pentru orice $X \in K$, $X \neq O_2$ există $Y \in K$ astfel încât $X \cdot Y = I_2$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$.
 - a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.
 - b) Să se studieze monotonia funcției f .
 - c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(1) + f(2) + \dots + f(n)}{n} \right)^n$.
2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$.
 - a) Să se calculeze I_1 .
 - b) Să se arate că $(n+2)I_n = (n-1)I_{n-2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
 - c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.
2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
3. Să se rezolve ecuația $3^{1-x} = 9$.
4. Să se rezolve ecuația $\log_5(x + 2) - \log_5(2x - 5) = 1$.
5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, -1)$ și este paralelă cu dreapta $y = x$.
6. Să se calculeze perimetrul unui triunghi echilateral care are aria egală cu $\sqrt{3}$.

SUBIECTUL II

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Să se calculeze $A \cdot B$.
 - b) Să se calculeze $A^2 + A^3$, unde $A^2 = A \cdot A$ și $A^3 = A^2 \cdot A$.
 - c) Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $A \cdot X = X \cdot A$, atunci există numerele reale a, b, c astfel încât
$$X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$ având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.
 - a) Să se determine numărul real c știind că $f(1) + f(-1) = 2a + 1$.
 - b) Știind că $a = -3, b = 1, c = 1$, să se determine rădăcinile reale ale polinomului f .
 - c) Să se exprime în funcție de numerele reale a, b, c determinantul $D = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$.
 - a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{x}{e^x}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Să se determine asimptota către $+\infty$ la graficul funcției f .
 - c) Să se arate că $f(x) \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x^n + 4}$.
 - a) Să se calculeze $\int (x+4)^2 \cdot f_1(x) dx$, unde $x \in [0, 1]$.
 - b) Să se calculeze $\int_0^1 x f_2(x) dx$.
 - c) Să se arate că aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f_{2008} , axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$ este un număr din intervalul $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$.

MT3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $\sqrt{50} - \sqrt{128} + \sqrt{200} = \sqrt{n}$.
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x^2 + (m - 1)x - m = 0$ să aibă rădăcini reale egale.
3. Triunghiul ABC are $AB = 10$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$ și $m(\sphericalangle C) = 45^\circ$. Să se calculeze lungimea laturii AC .
4. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctele $A(3, -3)$ și $B(1, 2)$.
5. Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât numerele $x + 2$, $3x + 2$, $6x + 5$ să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
6. Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $\lg^2 x + 5 \lg x + 6 = 0$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \perp y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Să se demonstreze că $x \perp y = \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1) + 1$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$.
- b) Să se verifice că legea de compoziție " \perp " este asociativă pe \mathbb{R} .
- c) Se consideră mulțimea $M = (1, +\infty)$. Să se arate că pentru oricare $x, y \in M$, rezultă că $x \perp y \in M$.
- d) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația $5^x \perp 3^{x-3} = 1$.
- e) Să se rezolve în \mathbb{R} inecuația $(x + 2) \perp (x - 3) < 1$.
- f) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \perp x \perp x = 2^n \cdot (x - 1)^3$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

Se consideră matricele $A, I_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se calculeze $A - 2I_3$.
- b) Să se calculeze $\det(2A)$.
- c) Să se determine numărul real x pentru care $A^2 = A + xI_3$.
- d) Să se arate că matricea $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I_3$ este inversa matricei A .
- e) Să se determine matricea $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ din ecuația matriceală $A \cdot X = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- f) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A + xI_3) = x^3$.

SESIUNEA AUGUST

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $z^2 = -9$.
2. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care ecuația $ax^2 + (3a - 1)x + a + 3 = 0$ are soluții reale.
3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi]$ ecuația $\cos 4x = 1$.
4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ cu proprietatea că $f(1) = f(2)$.
5. Să se calculeze lungimea razei cercului înscris într-un triunghi care are lungimile laturilor 13, 14, 15.
6. Triunghiul ABC are $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{\pi}{4}$. Să se demonstreze că $\frac{AB}{AC} = \sqrt{2}$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - a) Să se calculeze $\det(A)$.
 - b) Să se determine A^{-1} .
 - c) Să se arate că $(I_3 + A)^n = 2^{n-1}(I_3 + A)$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.
2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm polinomul $f_n = X^{3n} + 2X^2 - 4X - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
 - a) Să se arate că f_1 nu este divizibil cu polinomul $g = X - 2$.
 - b) Să se determine suma coeficienților câtului împărțirii polinomului f_3 la $X - 1$.
 - c) Să se arate că restul împărțirii polinomului f_n la polinomul $h = X^2 + X + 1$ nu depinde de n .

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x - x^a$, $a > 0$.
 - a) Să se calculeze $f'(1)$.
 - b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = a$.
 - c) Să se arate că, dacă $f(x) \geq 0$, $(\forall) x > 0$, atunci $a = e$.
2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_1^e \ln^n x \, dx$.
 - a) Să se calculeze I_1 .
 - b) Să se arate că $I_n = e - nI_{n-1}$, $(\forall) n \geq 2$.
 - c) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.

Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze suma $1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 25$.
2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - mx + 2$, $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine numărul real nenul m știind că valoarea minimă a funcției este egală cu 1.
3. Să se calculeze $\log_2(\operatorname{tg} 45^\circ) + \log_2(\operatorname{ctg} 45^\circ)$.
4. Să se calculeze probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \dots, \sqrt{11}\}$, acesta să fie irațional.
5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(2, -3)$ și este paralelă cu dreapta $x + 2y + 5 = 0$.
6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ABC știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ și $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
 - a) Să se scrie sistemul asociat ecuației matriceale $A \cdot X = B$.
 - b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.
 - c) Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{2, 6\}$ și (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + ay + z = 1 \\ 2y + 3z = 1 \end{cases}$$
, să se demonstreze că $\frac{x_0}{z_0}$ nu depinde de a .
2. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{2008} + (X - 1)^{2008}$ având forma algebrică $f = a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$, unde $a_0, a_1, \dots, a_{2008}$ sunt numere reale.
 - a) Să se calculeze $f(-1) + f(1)$.
 - b) Să se determine suma coeficienților polinomului f .
 - c) Să se determine restul împărțirii lui f la $X^2 - 1$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x - x$.
 - a) Să se verifice că $f'(x) = \ln x$ pentru orice $x > 0$.
 - b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.
 - c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe $(0, +\infty)$.
2. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1$.
 - a) Să se determine $\int f_1(x) dx$, unde $x \in [0, 1]$.
 - b) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{f_1(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$.
 - c) Să se arate că $\int_0^1 \sqrt{f_n(x)} dx \leq \sqrt{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

MT3

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = 0 \end{cases}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
2. Să se calculeze $S = \log_3 27 + \log_{\frac{1}{3}} 3 - \log_{\sqrt{3}} 1 + \log_3 \sqrt{3}$.
3. Să se afle suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și $a_5 = 11$.
4. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, -1)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + y + 1 = 0$.
5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $(0, 5)^{x^2-4} = (0, 125)^{2+x}$.
6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $BC = 12$, $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 75^\circ$.

SUBIECTUL II

Pe mulțimea $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este divizor al lui } 12\}$ se definește legea de compoziție $x \star y = \text{c.m.m.d.c}(x, y)$, $(\forall) x, y \in H$.

- a) Să se precizeze elementele mulțimii H .
- b) Să se arate că pentru oricare $x, y \in H$, rezultă că $x \star y \in H$.
- c) Să se verifice că $[(12 \star 6) \star 4] \star 2 = 12 \star [6 \star (4 \star 2)]$.
- d) Să se rezolve ecuația $6 \star x = 2$.
- e) Să se demonstreze că legea de compoziție " \star " este asociativă pe H .
- f) Să se demonstreze că legea de compoziție " \star " are element neutru pe H .

SUBIECTUL III

Se consideră mulțimea de matrice $M = \left\{ A(a) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A(a) = \begin{pmatrix} a^2 - 4 & -1 \\ a - 2 & 2a - 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ și matricele $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $A(a) = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
- b) Să se calculeze $C = 2 \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
- c) Să se verifice că $B^2 = -2B - 4I_2$.
- d) Să se calculeze $\det A(3)$.
- e) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ îndeplinește condiția $X^2 + 2X + 4I_2 = O_2$, atunci $X^3 = 8I_2$.
- f) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\det A(3) = 0$.