BACALAUREAT 2009
SESIUNEA IULIE

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Să se determine partea reală a numărului complex $(\sqrt{3}+i)^6$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\cdot$ Să se calculeze $(f\circ f)(512)$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\cos 2x+\sin x=0$.

4. Se consideră mulţimea $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Să se determine numărul tripletelor (a,b,c) cu proprietatea că a, b, $c\in M$ şi $a<b<c$.

5. Să se calculeze distanţa dintre dreptele paralele de ecuaţii $x+2y=6$ şi $2x+4y=11$.

6. Paralelogramul $ABCD$ are $AB=1$, $BC=2$ şi $m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$. Să se calculeze produsul scalar $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$.

SUBIECTUL II

1. Pentru a, b, $c\in\mathbb{R}^*$, se consideră sistemul $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$, x, y, $z\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

c) Ştiind că $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluţii (x,y,z), astfel încât $x^2+y^2=z-1$.

2. Se consideră mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c\end{pmatrix}\,\middle|\, a,b,c\in\mathbb{Z}_4\right\}$.

a) Să se determine numărul elementelor mulţimii G.

b) Să se dea un exemplu de matrice $A\in G$ cu proprietatea că $\det A\neq 0$ şi $\det A^2=\hat{0}$.

c) Să se determine numărul soluţiilor ecuaţiei $X^2=\begin{pmatrix}\hat{1} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$, $X\in G$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}\cdot$

a) Să se determine ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

c) Să se demonstreze că funcţia f este concavă pe intervalul $(-\infty,-1)$.

2. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţia $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=|\sin nx|$ şi numărul $I_n=\displaystyle\int_\pi^{2\pi}\frac{f_n(x)}{x}\,dx$.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\pi f_2(x)\,dx$.

b) Să se arate că $I_n\le\ln 2$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se arate că $I_n\ge\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}\right)$, $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1 = 3$ şi $a_3 = 7$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

2. Să se determine numerele reale m pentru care punctul $A(m,-1)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2-3x+1$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x+3) = 2$.

4. Să se calculeze numărul submulţimilor cu 3 elemente ale unei mulţimi care are 5 elemente.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

6. Triunghiul ABC are $AB = 8$, $AC = 8$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 30^\circ$. Să se calculeze aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi funcţia $f:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2-3X+I_3$, unde $X^2 = X\cdot X$.

a) Să se calculeze $det(I_3+B)$.

b) Să se demonstreze că $f(A) = I_3+B$.

c) Să se arate că $(f(A))^3 = I_3+3B+3B^2$, unde $(f(A))^3 = f(A)\cdot f(A)\cdot f(A)$.

2. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x\star y = x+y-3$ şi $x\circ y = (x-3)(y-3)+3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x\circ x = x\star x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x\circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x\star(y+1) = 4 \\ (x-y)\circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x,\, y\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^3+\dfrac{3}{x}\cdot$

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}^*$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot$

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$.

a) Să se calculeze volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox, a graficului funcţiei f.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt}{x^2}\cdot$

MT3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $x^2 - 4x + 3 = 0$.

2. Să se calculeze suma $1 + 2 + 3 + \ldots + 40$.

3. Să se determine valorile parametrului real m astfel încât ecuaţia $x^2 - 4mx + 1 = 0$ să aibă soluţii reale.

4. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(1, 2)$ la dreapta $d:\ x + y + 1 = 0$.

5. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuaţia $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

6. Să se calculeze $\frac{1}{2}\cos 135° + 3\sin 135°$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie $x \star y = xy + 2x + 2y + a$, cu $a \in \mathbb{Z}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ ştiind că legea "$\star$" admite element neutru.

b) Pentru $a = 2$ să se demonstreze că legea "$\star$" este asociativă.

c) Dacă $a = 2$ să se arate că $(x + y + 2) \star z = (x \star z) + (y \star z) + 2$, pentru orice $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}$.

d) Pentru $a = 2$ să se determine mulţimea $M = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, \text{există } x' \in \mathbb{Z}, \text{ astfel încât } x \star x' = -1\}$.

e) Pentru $a = 2$ să se determine $x,\ y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $x \star y = 3$.

f) Fie mulţimea $H = \{-3, -1\}$. Să se determine $a \in \mathbb{Z}$ astfel încât, pentru oricare $x,\ y \in H$, să rezulte că $x \star y \in H$.

SUBIECTUL III

Fie numerele reale a, b, c şi determinantul $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

a) Să se calculeze D pentru $a = 1$, $b = 2$ şi $c = 3$.

b) Să se arate că dacă $a = b$, atunci $D = 0$.

c) Pentru $b = 2$ şi $c = 3$, să se determine $a \in \mathbb{R}$, astfel încât $D = 2$.

d) Să se demonstreze că $D = (b - a)(c - a)(c - b)$.

e) Să se arate că dacă $D = 0$, atunci cel puţin două dintre numerele a, b şi c sunt egale.

f) Să se arate că dacă $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}$, atunci D este număr întreg par.

SESIUNEA AUGUST

MT1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Să se arate că numărul $(1+i\sqrt{3})^3$ este întreg.

2. Să se determine imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$.

3. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{-2x+1}=5$.

4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulţimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=4$.

5. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d:\ 5x-4y+1=0$.

6. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC ştiind că $AB=6$, $B=\dfrac{\pi}{4}$ şi $C=\dfrac{\pi}{6}\cdot$

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2\\ b & b+1 & b+2\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}$, cu $a,\ b\in\mathbb{R}$.

a) Să se arate că $\det(A)=(a-b)(a-1)$.

b) Să se calculeze $\det(A-A^t)$.

c) Să se arate că $\operatorname{rang}(A)\geq 2$, $(\forall)\ a,\ b\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f\in\mathbb{R}[X]$, $f=X^3+pX^2+qX+r$, cu $p,\ q,\ r\in(0,\infty)$ şi cu rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{C}$.

a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0,\infty)$.

b) Să se calculeze $x_1^3+x_2^3+x_3^3$ în funcţie de p, q şi r.

c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a+b+c<0$, $ab+bc+ca>0$ şi $abc<0$, atunci $a,\ b,\ c\in(-\infty,0)$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\ln(x^2+x+1)$.

a) Să se demonstreze că funcţia f este strict crescătoare.

b) Să se demonstreze că funcţia f este bijectivă.

c) Să se arate că graficul funcţiei f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\{x\}(1-\{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracţionară a numărului real x.

a) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Să se demonstreze că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

c) Să se arate că valoarea integralei $\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ nu depinde de numărul real a.

MT2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $2\log_3 4 - 4\log_3 2$.

2. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{x-1} + 2^x = 12$.

3. Să se determine numărul natural n, $n \geq 1$ ştiind că $A_n^1 + C_n^1 = 10$.

4. Fie funcţia $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 3$. Să se determine mulţimea valorilor funcţiei f.

5. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

6. Să se calculeze $\sin 135°$.

SUBIECTUL II

1. În mulţimea $\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ se consideră matricele $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine numerele a, b şi c astfel încât $A + F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Să se arate că pentru $a = c = 0$ şi $b = -1$ matricea A este inversa matricei F.

c) Să se rezolve ecuaţia $F \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, unde $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie $x \star y = 2xy - x - y + 1$.

a) Să se arate că $x \star y = xy + (1-x)(1-y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se arate că legea de compoziţie "$\star$" este asociativă.

c) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \star (1-x) = 0$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcţiei f.

c) Ştiind că $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, să se determine

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \ldots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}.$$

2. Se consideră $I_n = \displaystyle\int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Să se calculeze I_0.

b) Să se arate că $I_n \leq I_{n+1}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

c) Să se demonstreze că are loc relaţia $I_n = \dfrac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \dfrac{n}{2} I_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

MT3

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, ştiind că punctele $A(-1, 0)$; $B(0, 2)$ aparţin graficului funcţiei.

2. Să se calculeze $\vec{v} = 4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, unde $\vec{a} = 5\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} + 5\vec{j}$.

3. Să se calculeze $\cos 135° + \cos 45°$.

4. Să se calculeze valoarea expresiei $E = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2 - 6x + 4$.

5. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(2^x + 4^x + 4) = 1$.

6. Să se calculeze $|2 - 3\sqrt{2}| + |3 - 2\sqrt{2}|$.

SUBIECTUL II

Pe mulţimea numerelor naturale se defineşte legea de compoziţie $x \star y = r$, unde r este restul împărţirii produsului $x \cdot y$ la 10. Se admite că legea "$\star$" este asociativă pe $\mathbb{N}$. Se consideră mulţimea $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Să se arate că $10 \star x = 0$, $(\forall)$ $x \in \mathbb{N}$.

b) Să se calculeze $5 \star 5 \star 5 \star 5 \star 5$.

c) Să se arate că $x \star y \in I$, pentru oricare x, $y \in I$.

d) Să se demonstreze că legea "$\star$" determină pe mulţimea $I \backslash \{5\}$ o structură de grup comutativ.

e) Să se calculeze $2 \star 4 \star 6 \star \ldots \star 2008 \star 2010$.

f) Să se demonstreze că legea "$\star$" nu admite element neutru.

SUBIECTUL III

Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2.

b) Să se arate că $\det(A) = \det(A^2)$.

c) Să se determine x, $y \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea $A^2 + xA + yI_2 = O_2$.

d) Să se verifice egalitatea $A + A^2 + A^3 = O_2$.

e) Să se calculeze $A + A^2 + \ldots + A^{28}$.

f) Să se arate că pentru orice $a \in \mathbb{R}$ matricea $aI_2 + A$ este inversabilă.