BACALAUREAT 2010
SESIUNEA SPECIALĂ

Proba E c)

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Calculaţi produsul de numere complexe $i \cdot i^3 \cdot i^5 \cdot i^7 \cdot i^{11}$.

2. Verificaţi dacă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$ este injectivă.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{4^{2x}} = 8$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, produsul cifrelor sale să fie impar?

5. Un paralelogram $ABCD$ are $AD = 6$, $AB = 4$ şi $m(\sphericalangle ADC) = 120^\circ$. Calculaţi $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}|$.

6. Calculaţi $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

SUBIECTUL II

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ şi $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Verificaţi dacă $\det(A) = \det(B)$.

b) Demonstraţi că pentru orice matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, are loc egalitatea $X^2 = (a+d)X - (ad-bc)I_2$.

c) Demonstraţi că $A^n - B^n = (2^n - 1)(A - B)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

2. Fie polinomul $f = nX^n + (n-1)X^{n-1} + \ldots + 2X^2 + X$, unde $n \in \mathbb{N}$ şi $n \geq 2$.

a) Calculaţi suma coeficienţilor polinomului f.

b) Pentru $n = 4$, determinaţi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 1$.

c) Demonstraţi că dacă n este număr par, atunci restul împărţirii polinomului f la $g = X^2 - 1$ este egal cu $\frac{n^2}{4}X + \frac{n(n+2)}{4}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 + 2}$.

a) Arătaţi că funcţia f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei la graficul funcţiei f spre $-\infty$.

c) Arătaţi că funcţia f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ definit prin $I_n = \int_1^e \ln^n x\, dx$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi I_2.

b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

SESIUNEA IUNIE
M1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $((1-i)(i-1))^4$.

2. Arătaţi că funcţia $f:(-3,3)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\dfrac{3-x}{3+x}$ este impară.

3. Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $x^2+2x-8<0$.

4. Câte elemente din mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,100\}$ sunt divizibile cu 4 sau cu 5?

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $M(1,-2)$, $N(-3,-1)$ şi $P(-1,2)$. Determinaţi coordonatele punctului Q astfel încât $MNPQ$ să fie paralelogram.

6. Triunghiul ABC are $AB=6$, $AC=3$ şi $BC=5$. Calculaţi lungimea înălţimii $[AD]$.

SUBIECTUL II

1. Fie sistemul $\begin{cases} x-2y-8z=-65 \\ 3x+y-3z=22 \\ x+y+z=28 \end{cases}$, unde $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ şi matricea asociată sistemului $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -8\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Arătaţi că rangul matricei A este egal cu 2.

b) Rezolvaţi sistemul în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

c) Determinaţi numărul soluţiilor sistemului din mulţimea $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

2. Fie mulţimea de matrice $A=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\middle|\ a,b\in\mathbb{Z}_5\right\}$.

a) Determinaţi numărul elementelor mulţimii A.

b) Arătaţi că există o matrice nenulă $M\in A$ astfel încât $\begin{pmatrix}\hat{3} & \hat{1}\\ -\hat{1} & \hat{3}\end{pmatrix}\cdot M=\begin{pmatrix}\hat{0} & \hat{0}\\ \hat{0} & \hat{0}\end{pmatrix}$.

c) Rezolvaţi în mulţimea A ecuaţia $X^2=I_2$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Studiaţi monotonia funcţiei f.

c) Determinaţi punctele de inflexiune ale funcţiei f.

2. Fie şirul $(I_n)_{n\geq1}$ definit prin $I_n=\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{2x-1}{x}\,dx$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este strict crescător.

b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este mărginit.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} n(2-I_n)$.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea stiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 - 3^{x^2-1} = 1$.

4. Determinaţi câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Se consideră vectorii $\vec{v}_1 = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

6. Un triunghi dreptunghic are $AB = 3$, $AC = 4$. Calculaţi lungimea înălţimii duse din A.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $A^2 - A$.

b) Determinaţi inversa matricei A.

c) Rezolvaţi ecuaţia $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix}$, $X \in \mathscr{M}(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$, $g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}_3$.

a) Calculaţi $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Determinaţi rădăcinile polinomului f.

c) Demonstraţi că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru oricare $a \in \mathbb{Z}_3$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[-2, 0]$.

c) Demonstraţi că $0 \leq f(x) + f(x^2) \leq \frac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x \in [-1, 0]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}\cdot$

a) Calculaţi $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right) dx$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

c) Calculaţi $\int_1^e f(x) \cdot \ln x \, dx$.

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $\log_2\sqrt{6} - \log_2\sqrt{3}$.
2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$. Calculaţi $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \ldots \cdot f(10)$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} - 2^{x+1} = 24$.
4. Calculaţi numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$.
5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3, 4)$ şi $B(2, m)$. Ştiind că B aparţine dreptei de ecuaţie $y = 3x + 20$ determinaţi coordonatele mijlocului segmentului $[AB]$.
6. Calculaţi valoarea expresiei $E(x) = \cos x + \sin 2x$ pentru $x = 30°$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea $M = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x \circ y = x + y + \sqrt{2}$.

   a) Arătaţi că $x + y \in M$, oricare ar fi $x,\ y \in M$.
   b) Arătaţi că $x \cdot y \in M$, oricare ar fi $x,\ y \in M$.
   c) Determinaţi $x \in M$ cu proprietatea că $x(1 + \sqrt{2})^2 = 1$.
   d) Verificaţi dacă $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}} \circ \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} \in M$.
   e) Arătaţi că legea "$\circ$" este asociativă pe mulţimea M.
   f) Arătaţi că legea "$\circ$" determină pe mulţimea M o structură de grup.

SUBIECTUL III

1. Fie matricele $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A(a) = M + aI_2$, $a \in \mathbb{R}$.

   a) Arătaţi că $M^2 = M$.
   b) Determinaţi matricea $A(2010)$.
   c) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$, pentru care $\det\,(A(a)) = 2$.
   d) Arătaţi că $A^{-1}(1) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   e) Arătaţi că pentru oricare $a \in \mathbb{Z}$ matricea $A(a) + (A(a))^t$ este inversabilă, unde $(A(a))^t$ este transpusa matricei $A(a)$.
   f) Rezolvaţi în mulţimea $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia matriceală $X \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Subiect de rezervă
M1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Arătaţi că numărul $i\sqrt{2}-1$ este soluţie a ecuaţiei $z^2+2z+3=0$.

2. Fie funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-a$. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $(f\circ g)(x)>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-2x+1}=x+1$.

4. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\{1,3^3,3^6,3^9,\ldots,3^{2010}\}$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(3,5)$, $B(-2,5)$ şi $C(6,-3)$. Scrieţi ecuaţia medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC

6. Calculaţi $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

SUBIECTUL II

1. Fie sistemul $\begin{cases} x+y+az=1\\ x+2ay+z=-1\\ 2ax+y+(a+1)z=0\end{cases}$, unde x, y, $z\in\mathbb{R}$ şi a este parametru real.

a) Rezolvaţi sistemul pentru $a=0$.

b) Verificaţi dacă pentru $a=-1$ sistemul este compatibil.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluţie unică.

2. Fie m, $n\in\mathbb{R}$ şi polinomul $f=X^3-3X^2+mX-n$ care are rădăcinile x_1, x_2, $x_3\in\mathbb{C}$.

a) Determinaţi valorile reale m şi n pentru care $x_1=2+i$.

b) Determinaţi valorile reale m şi n pentru care restul împărţirii polinomului f la polinomul $(X-1)^2$ este egal cu 0.

c) Arătaţi că, dacă toate rădăcinile polinomului f sunt reale şi $m>0$, $n>0$, atunci x_1, x_2, x_3 sunt strict pozitive.

SUBIECTUL III

1. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$.

a) Arătaţi că dreapta de ecuaţie $y=x$ este asimptotă oblică pentru graficul funcţiei f spre $+\infty$.

b) Studiaţi derivabilitatea funcţiei f în punctul $x=-2$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln f(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\cos x}{2-\cos^2 x}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

b) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cdot f(x)\,dx$.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea stiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3 = 5$ şi $a_5 = 11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.

2. Se consideră funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x + 3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor f şi g.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2 - 1} = 2$.

4. Calculaţi $a \cdot b$ ştiind că $a + b = 150$ şi numărul a reprezintă 25% din numărul b.

5. Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2, 3)$, $B(4, 5)$ şi $C(m + 1, m^2)$ sunt coliniare.

6. Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x = \frac{1}{3}$ şi $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL II

1. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$, unde x, y, $z \in \mathbb{R}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Rezolvaţi sistemul pentru $m = 0$.

c) Verificaţi dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \star y = (x - 4)(y - 4) + 4$.

a) Demonstraţi că legea "$\star$" este asociativă.

b) Demonstraţi că $x \star y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi x, $y \in (4, +\infty)$.

c) Calculaţi $1 \star 2 \star 3 \star \ldots \star 2010$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}\cdot$

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(2, 5)$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ şi $g(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$.

a) Demonstraţi că funcţia g este o primitivă a funcţiei f.

b) Calculaţi $\int_1^4 f(x)\, dx$.

c) Calculaţi $\int_1^{e^2} 2^{g(x)} \cdot f(x)\, dx$.

SESIUNEA AUGUST
M1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică - informatică.

SUBIECTUL I

1. Care dintre numerele $2\sqrt[3]{6}$ şi $3\sqrt[3]{3}$ este mai mare?

2. Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

3. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $x^2-x+m^2=0$ are două soluţii reale egale.

4. Determinaţi numărul termenilor raţionali din dezvoltarea $(1+\sqrt[4]{2})^{41}$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-3)$ şi $D(4,a)$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB şi CD să fie paralele.

6. Fie mulţimea $A=\left\{0;\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}\right\}$. Care este probabilitatea ca, alegând un element din mulţimea A, acesta să fie soluţie a ecuaţiei $\sin^3 x+\cos^3 x=1$?

SUBIECTUL II

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\a&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $B_n=A^n+A^{n+1}+A^{n+2}$.

a) Arătaţi că $A^{2010}=a^{670}\cdot I_3$.

b) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care $\det(B_1)=0$.

c) Determinaţi $a\in\mathbb{R}$ pentru care toate matricele B_n, $n\in\mathbb{N}^*$ sunt inversabile.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea $x\star y=2xy-3x-3y+m$, $m\in\mathbb{R}$. Fie mulţimea $M=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

a) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $x\star y\in M$, pentru orice x, $y\in M$.

b) Pentru $m=6$, arătaţi că $(M,\star)$ este grup.

c) Pentru $m=6$, demonstraţi că funcţia $f:M\to\mathbb{R}^*$, $fx=2x-3$ este un izomorfism între grupurile $(M,\star)$ şi $(\mathbb{R}^*,\cdot)$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}$.

a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{-\sqrt[3]{2n+1}}\right)^{\sqrt[3]{2n}}$.

2. Se consideră şirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}\,dx$.

a) Calculaţi $I_1+I_2+I_3$.

b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Filiera teoretică, profilul real, specializarea stiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Determinaţi $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \leq \dfrac{x+1}{3} \leq 1$.

2. Determinaţi funcţia de gradul al doilea al cărei grafic conţine punctele $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(-1,2)$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

4. Calculaţi probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulţimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \geq n^2$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,-1)$, $O(0,0)$. Determinaţi coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

6. Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ şi $m(\sphericalangle ACB) = 30°$.

SUBIECTUL II

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Verificaţi dacă $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

c) Rezolvaţi ecuaţia $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2$ şi mulţimea $G = \{g = aX^3 + bX^2 + cX + d \,|\, a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3\}$.

a) Calculaţi $f(\hat{1})$.

b) Determinaţi rădăcinile polinomului f.

c) Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.

a) Demonstraţi că $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

b) Demonstraţi că funcţia f este crescătoare pe $[0,1]$.

c) Demonstraţi că $\dfrac{2}{e} \leq \dfrac{1}{f(x)} \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}, & \text{pentru } x \geq 1 \\ 2x, & \text{pentru } x < 1 \end{cases}$.

a) Demonstraţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Calculaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_1^{\sqrt{6}} x \cdot f(x)\, dx$.

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare.

SUBIECTUL I

1. Determinaţi numărul submulţimilor mulţimii $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, care au două elemente.
2. Determinaţi $m \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3m - 1)x + 2$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
3. Arătaţi că $x_1x_2 - 5(x_1 + x_2) = -10$, unde x_1, x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $ax^2 - (2a + 1)x + 5 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.
4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 \dfrac{3x - 2}{x + 2} = 1$.
5. Determinaţi vectorul de poziţie al centrului de greutate al triunghiului ABC ştiind că $\vec{r}_A = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{r}_B = -5\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{r}_C = 8\vec{i} + 7\vec{j}$.
6. Scrieţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(4, 3)$ şi are panta $m = \tan 45°$.

SUBIECTUL II

1. Pe mulţimea numerelor reale se definesc legile de compoziţie $x \star y = x + y + 2$ şi $x \circ y = xy - 2x - 2y + m$, unde $m \in \mathbb{R}$.
   - a) Arataţi că legea "$\star$" este asociativă pe mulţimea numerelor reale.
   - b) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care $11 \circ 1 = 0$.
   - c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x - 1) \circ 4 = (3 \star 3) + m$.
   - d) Determinaţi $m \in \mathbb{R}$ pentru care legea "$\circ$" admite elementul neutru $e = 3$.
   - e) Pentru $m = 6$ determinaţi elementele $x \in \mathbb{R}$ ale căror simetrice, în raport cu legea "$\circ$", verifică relaţia $x' = \dfrac{3}{2} - x$.
   - f) Arătaţi că numerele reale $a = x \star x$, $b = a \star x$, $c = b \star x$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice pentru oricare $x \in \mathbb{R}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră matricele: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ şi $C = I_3 + A$.
   - a) Calculaţi $\det(C) + \det(A)$.
   - b) Calculaţi C^{-1}, unde C^{-1} este inversa matricei C.
   - c) Calculaţi $M = C \cdot (C - 2A + A^2) - I_3$.
   - d) Arătaţi că $\det(I_3 + xA) = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
   - e) Arătaţi că matricea $C + C^t$ este inversabilă, unde C^t este transpusa matricei C.
   - f) Calculaţi A^{2010}.

Subiect de rezervă
M2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea stiinţe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I

1. Calculaţi $\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+2x-5$. Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcţiei f este egală cu 2.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27}$.

4. Calculaţi $C_6^2-A_4^2$.

5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ şi $B(6,8)$. Calculaţi distanţa de la punctul O la mijlocul segmentului (AB).

6. Calculaţi $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

SUBIECTUL II

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 3 & -1\\ m & 0 & 2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y-z=-2\\ x+3y-z=-2\\ mx+2z=4\end{cases}$, unde x, y, $z\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi determinantul matricei A.

b) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea A este inversabilă.

c) Rezolvaţi sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

a) Demonstraţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare x, $y\in\mathbb{R}$.

b) Determinaţi elementul neutru al legii ”$\circ$”.

c) Daţi exemplu de două numere a, $b\in\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a\circ b\in\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL III

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,2)$.

c) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se consideră funcţiile $f_n:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=x^n\ln x$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{f_1(x)}\,dx$.

b) Demonstraţi că primitivele funcţiei f_1 sunt convexe pe intervalul $\left[\dfrac{1}{e},\infty\right)$.

c) Calculaţi $\displaystyle\int_1^{e}\frac{f_{2009}(x)}{x^{2010}}\,dx$.