MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEȚULUI IAŞI
SOCIETATEA DE ŞTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA – Filiala IAŞI

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa JUDEȚEANĂ ,BARAJ
Iaşi, 5 mai 2010

CLASA A VI-A- BAREM DE NOTARE

1. O mulțime M de numere naturale are proprietatea *(P)*: **„ dacă pentru orice** $x \in M$ **avem:** $(x-4) \in M$ **sau** $\frac{x}{4} \in M$ **”.**

Arătați că:

a) există mulțimi cu cinci elemente care au proprietatea *(P)* (să se dea un exemplu);
b) dacă M are proprietatea *(P)*, atunci $9 \notin M$;
c) dacă M are proprietatea *(P)* şi $16 \in M$, atunci $0 \in M$.

Soluție:

a) un exemplu (verificarea condițiilor !): $M = \{0,4,8,16,32\}$ ……………………………………2p

b) presupunem că există o mulțime M care are proprietatea *(P)* şi pentru care $9 \in M$; deducem că $5 \in M$ sau $\frac{9}{4} \in M$. Cum M conține numai numere naturale, deducem că $5 \in M$ ………………….1p

$5 \in M$,de unde $1 \in M \Rightarrow -3 \in M$ sau $\frac{1}{4} \in M$, contradicție.Deci $9 \notin M$ …………………………..1p

c) $16 \in M \Rightarrow 12 \in M$ sau $4 \in M$ ……………………………………………………………………..1p

● Dacă $12 \in M$, atunci $8 \in M$ sau $3 \in M$; folosind proprietatea *(P),*de aici se deduce însă că putem avea doar $8 \in M$, apoi: $4 \in M$ sau $2 \in M$. La fel, avem că $2 \notin M$, deci $4 \in M$; rezultă: $0 \in M$ sau $1 \in M$, dar dacă $1 \in M$, atunci $-3 \in M$ sau $\frac{1}{4} \in M$, absurd, deci $0 \in M$ …………………………..1p

● Dacă $4 \in M$, am văzut deja că se ajunge la $0 \in M$. ………………………………………………1p.

2. Determinați cele mai mici numere naturale consecutive $a< b< c< d$ ştiind că: $8|a$, $7|b$, $6|c$, $5|d$.

Soluție:

Avem $a= 8m,\ m \in N^*$ ………………………………………………………………………………1p.
Din $7|b$, $b=a+1$, $\Rightarrow$ $7|8m+1 \Rightarrow 7|m+1$……………………………………………………….1p
Din $6|c$, $c=a+2$, $\Rightarrow$ $6|8m+2 \Rightarrow 3|4m+1 \Rightarrow 3|m+1$ ……………………………………………1p
Din $5|d$, $d=a+3$, $\Rightarrow$ $5|8m+3 \Rightarrow 5|3(m+1) \Rightarrow 5|m+1$…………………………………………1p
Din cele 3 relații $\Rightarrow$ $m+1$ este un multiplu al numerelor $3,5,7$…………………………………...1p
Atunci $m+1=105k,\ k \in N^*$ ………………………………………………………………………1p
Deoarece a este cel mai mic posibil, alegem $k=1$, de unde obținem $a=832,\ b=833, c=834,\ d=835$.....1p

3.Se consideră triunghiul ABC cu $m(\widehat{B})=45^o$, $AD \perp BC$ şi $CE \perp AB$; $D \in BC, E \in AB$.
Dacă F este mijlocul laturii [AC], arătați că:

a) $FE = FD$;
b) $FE \perp FD$.

Soluție :

a) DF este mediană in $\triangle ADC$ dreptunghic $\Rightarrow$ $DF = \frac{1}{2} AC$ (1)..1p

EF este mediană in $\triangle AEC$ dreptunghic $\Rightarrow$ $EF = \frac{1}{2} AC$ (2)..1p

Concluzia : $FE = FD$...1p

b) Din (1) $\Rightarrow$ $\triangle FDC$ este isoscel: $\sphericalangle FDC \equiv \sphericalangle FCD$ (3).

Analog, din (2) $\Rightarrow$ $\triangle FAE$ este isoscel: $\sphericalangle FEA \equiv \sphericalangle FAE$ (4) 1p

$\sphericalangle EFC$ este exterior $\triangle EFA$, coform cu (4) $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle EFC) = 2m(\hat{A})$ (5)..............................1p

Din (3) $\Rightarrow$ $m(\sphericalangle DFC) = 180^o - 2m(\hat{C})$ (6) 1p

$m(\sphericalangle EFD) = m(\sphericalangle EFC) - m(\sphericalangle DFC) = 2(m(\hat{A}) + m(\hat{C})) - 180^o = 90^o$.

Deci $FE \perp FD$...1p.

<u>Observație</u> : Concluzia rămane adevărată şi in cazurile când A sau C sunt unghiuri obtuze.

4. Se consideră un triunghi ABC în care $AB = 6$, $AC = 7$, $BC = 9$ şi se notează cu M şi N picioarele perpendicularelor duse din punctul A pe bisectoarele interioare ale unghiurilor $\widehat{B}$, respectiv $\widehat{C}$.
Calculați lungimea segmentului [MN].

Soluție :

Notăm $AM \cap BC = \{P\}$ şi $AN \cap BC = \{Q\}$.

● Triunghiul ABP este isoscel, deoarece BM este bisectoare şi înălțime, deci $AB = BP = 6$. Deducem $PC = 3$ (1)...2p

● Analog se obține că triunghiul ACQ este isoscel, deci $AC = CQ = 7 \Rightarrow QB = 2$ (2) 1p

● Din (1) şi (2) ajungem la $PQ = 4$ 2p

● Se deduce imediat că MN este linie mijlocie în triunghiul APQ şi astfel : $MN = 2$.....................2p