

**Clasa a VIII-a**

**SUBIECTUL I**     Soluție:

Dacă  $x^2 - y^2 = 2(x+y) \Leftrightarrow (x+y)(x-y-2) = 0$  .....1p

**I**  $x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y$  .....1p

$\frac{x-1}{y+1} = \frac{2+y-1}{y+1} = \frac{y+1}{y+1} = 1 \in \{\pm 1\}$  .....1p

**II**  $x = -y \Rightarrow \frac{x-1}{y+1} = \frac{-y-1}{y+1} = -1 \in \{\pm 1\}$  .....1p

Dacă  $\frac{x-1}{y+1} \in \{\pm 1\} \Rightarrow$  **I**  $\frac{x-1}{y+1} = -1 \Rightarrow x-1 = -1-y \Rightarrow x+y = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 0$   
 $\Rightarrow 2(x+y) = 0$  .....1p

**II**  $\frac{x-1}{y+1} = 1 \Rightarrow x-1 = y+1 \Rightarrow x-y = 2$  .....1p

$\Rightarrow x^2 - y^2 = 2(x+y)$  .....1p

**SUBIECTUL II**     Soluție:

**a)**  $|a+b| = |a-b| \Rightarrow a+b = a-b \Rightarrow b = 0$  .....1p

    sau  $a+b = b-a \Rightarrow a = 0$  .....1p

$\Rightarrow a \cdot b = 0$  în ambele cazuri .....1p

**b)** Folosind punctul **a)**  $\Rightarrow a=0$  sau  $b=c=0$  .....1p

    1) dacă  $a=0 \Rightarrow |b+c| = |-b+c| = |b-c| \Rightarrow b=0$  sau  $c=0$  .....1p

    2)  $b=c=0 \Rightarrow b=c \Rightarrow |a+2b| = |-a+2b| \Rightarrow a=0$  sau  $2b=0$  .....1p

$a=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0=c$  .....1p

**SUBIECTUL III**     Soluție:

**a)** realizarea desenului .....1p

$\Delta ABC$  este dreptunghic în  $C$  .....1p

    Din teorema celor trei perpendiculare  $\Rightarrow MC \perp BC$  .....1p

**b)** Fie  $CD \perp AB$ ;  $MD$  este proiecția lui  $MC$  pe  $(AMB)$  .....1p

$CD = \frac{\sqrt{3}}{2}$  .....1p

$\angle(MC, (AMB)) = \angle(CMD)$  .....1p

$\sin \angle(CMD) = \frac{CD}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow m\angle(MC, (AMB)) = 30^\circ$  .....1p

**SUBIECTUL IV**     Soluție:

**a)** Realizarea desenului .....1p

**b)** Fie  $DE \cap AF = \{M\}$

$\Delta AED \cong \Delta BFA$  (CC) .....1p

Rezultă  $\angle AED \cong \angle BFA$ . Atunci în  $\Delta AME$ :

$m\angle(EAM) + m\angle(AEM) = m\angle(BAF) + m\angle(BFA) = 90^\circ$

Rezultă că  $m\angle(AEM) = 90^\circ$ , deci  $AF \perp DE$  .....1p

**c)**  $FF' \perp (ABCD)$ ,  $MF \perp DE$  (cf. punctului b));  $MF, DE \subset (ABCD) \Rightarrow F'M \perp DE$ ,  
deci unghiului plan corespunzător unghiului diedru este  $\angle F'MF$  .....1p

În triunghiul  $DAE$  aplicăm teorema lui Pitagora.

Rezultă:  $DE = 3\sqrt{5}$ .

$$AM \perp DE \Rightarrow AM = \frac{AD * AE}{DE} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Atunci  $MF = AF - AM = \frac{9\sqrt{5}}{5}$ . În triunghiul  $F'MF$ :  $\operatorname{tg}(\angle F'MF) = \frac{F'F}{MF} = \sqrt{5}$  .....1p

**d)** Pe semidreapta (AB luăm N astfel încât  $BN = BF$ .

$$\Delta PBN \cong \Delta PBF (C.C) \Rightarrow PN = PF (1)$$

Perimetrul triunghiului  $A'PF$  este minim  $\Leftrightarrow A'P + PF + A'F$  este minimă.

Cum  $A'F = \text{constant}$  perimetrul este minim  $\Leftrightarrow A'P + PF$  este minim  $\Leftrightarrow A'P + PN$  este minim  $\Leftrightarrow A', P, N$  sunt coliniare. ....1p

$$PB \parallel AA' \Rightarrow \Delta NPB \text{ asemenea cu } \Delta NAA' \Rightarrow \frac{PB}{AA'} = \frac{BN}{NA} \Rightarrow PB = 3 \text{ cm} \dots\dots\dots 1p$$

**Clasa a VI-a**

**SUBIECTUL I Rezolvare:**

**a)** Fie  $x$  suma depusă la bancă. Andreea a depus  $\frac{1}{2}x$ , Adi a depus  $\frac{1}{5}x$ , Mihaela a depus

$$x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{5}x\right) = \frac{3}{10}x \dots\dots\dots 1p$$

Andreea a ridicat  $\frac{1}{5} * \frac{1}{2}x = \frac{1}{10}x$ . Adi a ridicat  $\frac{1}{2} * \frac{1}{5}x = \frac{1}{10}x$ .

Mihaela a ridicat  $\frac{2}{3} * \frac{3}{10}x = \frac{2}{10}x \dots\dots\dots 1p$

Suma rămasă  $x - \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}x + \frac{2}{10}x\right) = \frac{6}{10}x \dots\dots\dots 1p$

Din  $\frac{6x}{10} = 600 \Rightarrow x = 1000(\text{lei})$ . Andreea a depus 500 de lei, Adi a depus 200 de lei și Mihaela a depus 300 de lei. ....1p

**b)** Andreea mai are de primit 400 de lei, Adi mai are de primit 100 de lei și Mihaela mai are de primit 100 de lei. ....1p

Andreea mai are de primit 66,(6)% din suma rămasă. ....1p

Adi și Mihaela mai au de primit 16,(6)% din suma rămasă. ....1p

**SUBIECTUL II**

Se poate scrie  $11(a + b) = 22 \frac{10a + b}{10b + a} \dots\dots\dots 1p$

Deci  $a + b = \frac{20a + 2b}{10b + a} \dots\dots\dots 1p$

Cum  $a + b \in N \Rightarrow \frac{198b}{ba} \in N \dots\dots\dots 1p$

Deci  $a + b = \frac{20(10b + a) - 198b}{10b + a} = 20 - \frac{198b}{ba} \dots\dots\dots 2p$

Deoarece  $\overline{ba}$  nu divide  $b \Rightarrow \overline{ba} : 198 \Rightarrow \overline{ba} \in \{1, 18, 22, 99\} \dots\dots\dots 1p$

Dar  $a \neq b$  și  $\overline{ba} = 18 \Rightarrow \overline{abba} = 8118 \dots\dots\dots 1p$

### SUBIECTUL III Rezolvare:

- Figura .....1p  
Notăm  $m(\angle B'BC) = x^\circ \Rightarrow m(\angle ABC) = 2x^\circ$  .....1p  
Dar  $[CC'] \equiv [BC] \Rightarrow \Delta CC'B = \text{isoscel} \Rightarrow m(\angle CC'B) = 2x^\circ$  .....1p  
 $m(\angle BCC') = 180^\circ - 4x^\circ$  .....1p  
Dar  $[CC']$  este bisectoare  $m(\angle C'CB') = 180^\circ - 4x^\circ \Rightarrow m(\angle BCB') = 360^\circ - 8x^\circ$  .....1p  
 $\Delta CBB'$  este isoscel  $\Rightarrow m(\angle BB'C) = 360^\circ - 8x^\circ$   
În  $\Delta CBB'$   $x^\circ + 360^\circ - 8x^\circ + 360^\circ - 8x^\circ = 180^\circ \Rightarrow x^\circ = 36^\circ$  .....1p  
Finalizare  $m(\angle ABC) = 72^\circ$ ,  $m(\angle BCA) = 72^\circ$ ,  $m(\angle BAC) = 36^\circ$  .....1p

### SUBIECTUL IV

#### Rezolvare:

- a)  $1^\circ + 3^\circ + 5^\circ + 7^\circ + 9^\circ + 11^\circ = 36^\circ$  .....1p  
 $36^\circ : 36^\circ = 10$  .....1p  
 $10 * 6 = 60$  (unghiuri în jurul punctului) .....1p  
b)  $m(\angle O_4) = 7^\circ$  .....1p  
 $m(\angle O_{14}) = 3^\circ$  .....1p  
Măsura unghiurilor format de bisectoarele unghiurilor este egală cu:  
 $\frac{7^\circ}{2} + 9^\circ + 11^\circ + 1^\circ + 3^\circ + 5^\circ + 7^\circ + 9^\circ + 11^\circ + 1^\circ + \frac{3^\circ}{2} = 62^\circ$  .....2p

### Clasa a VII-a

#### SUBIECTUL I

##### Rezolvare:

- a)  $(n+1)/(3n+7) \Rightarrow (n+1)/(6n+14)$  .....1p  
 $(n+1)/(2n+6) \Rightarrow (n+1)/(6n+18)$  .....1p  
 $(n+1)/4 \Rightarrow n \in \{0,1,3\}$  .....1p  
b)  $(x-5)^2 + y - 18 = 0$  .....2p  
 $(x-5)^2 \in \{0,1,4,9,16\}$  .....1p  
 $(x,y) \in \{(5,18), (6,17), (4,17), (7,14), (3,14), (8,9), (2,9), (9,2), (1,2)\}$  .....1p

#### SUBIECTUL II

##### Rezolvare:

- a)  $\frac{4x-5}{x+1} = k^2, k \in N$  .....1p  
 $(x+1)/9 \Rightarrow (x+1) \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$  .....2p  
 $x \in \{2\}$  .....1p  
b)  
Dacă  $k > 0$ , atunci  $0 * x + k > 0$  pentru orice  $x$  număr real. ....2p  
 $(m-1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = 1$  sau  $m = 2$  .....1p

#### SUBIECTUL III

##### Rezolvare:

- a)  $MN \parallel PT$  conform reciprocei teoremei lui Thales sau teoremei liniei mijlocii ..... 1p  
 $MNTP$  trapez isoscel .....2p  
b)  $G$  centru de greutate în  $\Delta ACD \Rightarrow \frac{OG}{OD} = \frac{1}{3}$  .....0,5p

P centru de greutate în  $\triangle ABD \Rightarrow \frac{OP}{OA} = \frac{1}{3}$  .....0,5p

$PG \parallel AD$  conform teoremei reciprocei lui Thales .....1p

$GP \perp AB, GP \parallel AD \Rightarrow AD \perp AB$  .....1p

ABCD pătrat conform definiției .....1p

#### SUBIECTUL IV

##### Rezolvare:

a) AEDF paralelogram ..... 1p

$AE=FD$  și  $AF=DE$  conform teoremei .....0,5p

$DF+FA=AE+ED$  .....0,5p

b)  $\triangle ADF$  congruent cu  $\triangle DAE \Rightarrow$  au ariile egale .....1p

$\frac{\text{aria}\triangle FBD}{\text{aria}\triangle DAF} = \frac{BF}{AF}$  .....1p

$\frac{\text{aria}\triangle DAE}{\text{aria}\triangle DEC} = \frac{AE}{EC}$  .....1p

$\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DC}$  conform teoremei lui Thales .....0,5p

$\frac{AE}{EC} = \frac{BD}{DC}$  conform teoremei lui Thales .....0,5p

Finalizare .....1p

#### Clasa a V-a

##### SUBIECTUL I Rezolvare:

a)

$1+2+3+\dots+2011=2011 \cdot (2011+1) : 2 = 2023066$  .....3p

b) Presupunem că toate numerele sunt cel mult egale cu 2011, fiind diferite, pot fi:

1,2,3,..., 2011 .....2p

Atunci suma lor este  $2023066 < 2023067$  .....1p

Deci cel puțin unul din ele este mai mare ca 2011 .....1p

**Total .....7p**

##### SUBIECTUL II Rezolvare:

Suma primului copil este de forma  $9 \cdot k + 7, k \in \mathbf{N}$  .....2p

Suma celui de al doilea copil este de forma  $6 \cdot p + 3, p \in \mathbf{N}$  .....2p

Același obiect în același magazin are același preț, deci  $9 \cdot k + 7 = 6 \cdot p + 3$  .....1p

$6 \cdot p + 3$  se divide cu 3,  $9 \cdot k + 7$  nu se divide cu 3 .....1p

cei doi copii nu au sume egale, deci nu-și pot cumpăra obiecte identice .....1p

**Total .....7p**

##### SUBIECTUL III Rezolvare:

$5 \cdot a = 6^{60} - 1$  .....2p

$4 \cdot b = 5^{80} - 1$  .....2p

$6^{60} = 216^{20}$  .....1p

$5^{80} = 625^{20}$  .....1p

$5 \cdot a < 4 \cdot b$  .....1p

**Total .....7p**

## SUBIECTUL IV

### Rezolvare:

Notăm unul dintre numere cu  $x$  și obținem  $x^2+x^3 = x^2(1+x)$ .....2p  
 $x^2$  este pătrat perfect, deci și  $1+x$  este pătrat perfect.....2p

$x \in \{15;24;35;48;63;80;99\}$  .....1p

$S=15+24+35+48+63+80+99=364$ .....1p  
 $364=13 \cdot 28$ , deci  $S$  se divide cu 13.....1p

**Total .....7p**