OLIMPIADA DE MATEMATICĂ BOTOSANI

etapa județeană 7 martie 2009

Clasa a V- a

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Aflați numerele pătrate perfecte de forma $\overline{aabb}$.

4p) b) Aflați numerele pătrate perfecte de forma $\overline{abcd}$, astfel încât $\overline{abcd} = \overline{abc} \cdot \overline{bd}$

SUBIECTUL II (7p)

3p) a) Știind că $\frac{a+b}{2} > \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}, \forall a,b \in \mathbb{N}^*, a \neq b,$ să se demonstreze că

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{4}{a+b}, \forall a,b \in \mathbb{N}^*, a \neq b$;

4p) b) Să se arate că $\frac{1}{501}+\frac{1}{502}+...+\frac{1}{1000} > \frac{13}{20}$.

SUBIECTUL III (7p)

2p) a) Aflați resturile posibile ale împărțirii unui număr pătrat perfect la 7;

3p) b) Demonstrați că, dacă $a,b \in \mathbb{N}$, $\left(a^2+b^2\right) \vdots 7$ atunci $a \vdots 7$ şi $b \vdots 7$;

2p) c) Determinați toate numerele $a,b \in \mathbb{N}$ pentru care $a^2+b^2 = 2009$.

SUBIECTUL IV (7p)

7p) Determinați $x,y,z \in \mathbb{N}$, x număr prim, din egalitatea $x^7 + y^x \cdot z = 2137$

Clasa a VI- a

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numărul natural $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2009$.

4p) a) Să se demonstreze că $A \vdots 41^{50}$; 3p) b) Să se demonstreze că $A \vdots 7^{333}$.

SUBIECTUL II (7p)

7p) Fie $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \cdot b < c$. Să se arate că $a+b \leq c$.

SUBIECTUL III (7p)

Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi.

7p) Dacă numerele $1003a+1004b$, $1003a+1005c$ şi $1004b+1005c$ sunt direct proporționale cu 2007, 2008, respectiv 2009 atunci stabiliți natura triunghiului.

SUBIECTUL IV (7p)

În triunghiul isoscel ABC cu $(AB) \equiv (AC)$, $BB' \perp AC, B' \in AC$, C' este simetricul lui C față de AB. Fie M mijlocul lui (BC) şi $BB' \cap CC' = \{D\}$.

3p) a) Să se demonstreze că punctele A, D şi M sunt coliniare.

4p) b) Să se demonstreze că $BB' \perp BC'$ dacă şi numai dacă B' este mijlocul lui (AC).