CLASA a V a

1.

Constatăm că $d<4$ (pentru că dacă $d=4$ ar rezulta că $\overline{aad}\cdot 16$ ar fi mai mare decât $\overline{abbc}$. Pentru $d=3 \Rightarrow \overline{abbc}=9\cdot\overline{aa3} \Rightarrow n(\overline{abbc})=n(9\cdot 3)=7 \Rightarrow c=7$ .Deci $\overline{abb7}=9\cdot\overline{aa3} \Rightarrow a=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \overline{2bb7}=9\cdot 223 \Rightarrow 9\cdot 223=2007 \Rightarrow b=0$. Deci $2007=3^2\cdot 223$.

2.

a) $2000=1936+64=44^2+4^3$. Avem:
$2000^{2005}=2000^{2004}\cdot 2000=2000^{2004}(1936+64)=2000^{2004}(44^2+4^3)=2000^{2004}\cdot 44^2+2000^{2004}\cdot 4^3=$
$=(2000^{1002}\cdot 44)^2+(2000^{668}\cdot 4)^3$

b) $2005=1681+324=41^2+18^2$. Deci
$2005^{2005}=2005^{2004}\cdot 2005=2005^{2004}(1681+324)=2005^{2004}(41^2+18^2)=2005^{2004}\cdot 41^2+2005^{2004}\cdot 18^2=$
$=(2005^{1002}\cdot 41)^2+(2005^{1002}\cdot 18)^2$

3.

a) Se pot alege, de exemplu, $A=\{1,2,5,6\}$ şi $B=\{3,4,7,8\}$.

b) Presupunem prin reducere la absurd că există A şi B ”netriunghiulare” astfel încât $A\cup B=P, A\cap B=\varnothing$. Luăm $7\in A$, cazul $7\in B$ fiind analog.

I. Dacă $5\in A$, din $5,7\in A \Rightarrow 9\in B, 6\in B$ şi $3\in B$. Dar $3,6,9\in B \Rightarrow B$ ”triunghiulară”.

II. Dacă $9\in A$, din $7,9\in A \Rightarrow 5\in B, 8\in B, 11\in B$. Dar $5,8,11\in B \Rightarrow B$ ”triunghiulară”.

III. Dacă $5\notin A$ şi $9\notin A \Rightarrow 5\in B$ şi $9\in B$. Din $5,9\in B \Rightarrow 1\in A$ şi $13\in A$. Dar $1,7,13\in A \Rightarrow A$ ”triunghiulară”. Aşadar oricum am alege A şi B cu $A\cup B=P, A\cap B=\varnothing$, cel puţin una dintre ele este ”triunghiulară”.

4.

Fie a şi b cele două numere căutate. Din teorema împărţirii cu rest putem scrie $a=b\cdot c+r$ cu $0\le r<b$. Din enunţ $b=2c$ şi $c=4r$ de unde $b=8r.$ Pe de altă parte $b+c+r=117$, adică $13r=117,$ de unde $r=9$. Atunci $c=36, b=72$ şi $a=2601$.