CLASA a VI a

1.

$$5=1^2+2^2>2\cdot 2\Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{2\cdot 2}$$

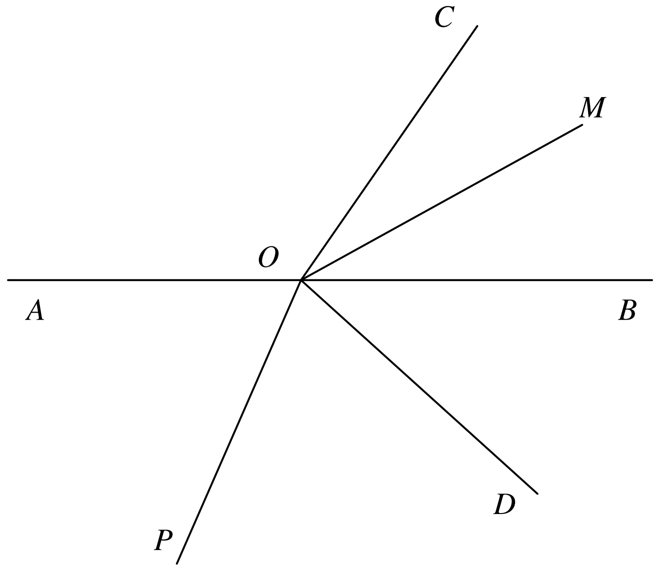
$$13=2^2+3^2>2\cdot 2\cdot 3\Rightarrow \frac{1}{13}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 3}$$

....

$$2113=32^2+33^2>2\cdot 32\cdot 33\Rightarrow \frac{1}{2113}<\frac{1}{2\cdot 32\cdot 33}$$

Atunci $\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\frac{1}{25}+\frac{1}{41}+...+\frac{1}{2113}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{31\cdot 32}+\frac{1}{32\cdot 33}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{33}\right)=\frac{32}{2\cdot 33}=\frac{16}{33}$.

2.



Dacă $m(\sphericalangle COM)=m(\sphericalangle MOB)=a, m(\sphericalangle AOP)=m(\sphericalangle POD)=b, m(\sphericalangle BOD)=c,$ atunci $2a+c=90^0$ şi $2b+c=90^0\Rightarrow a+b+c=135^0$.

3.

Fie $x\in\{1,2,...,9\}, y\in\{0,1,...,9\}$

$\overline{x0yy0x}=x\cdot 100001+y\cdot 1100=11\cdot(9091\cdot x+100\cdot y)=n^3\Rightarrow 9091\cdot x+100\cdot y=11^2\cdot k^3$

$9091\cdot x+100\cdot y=11^2\cdot 75\cdot x+16\cdot x+100y\,\vdots\,11^2\Rightarrow 16\cdot x+100y\,\vdots\,11^2$, dar $16\cdot x+100y\,\vdots\,4$ şi cum $(4,11^2)=1\Rightarrow 16\cdot x+100y=11^2\cdot 4\cdot m\Rightarrow 4\cdot x+25\cdot y=11^2\cdot m$. Pe de altă parte, $4\le 4\cdot x+25\cdot y\le 261$, de unde rezultă că $4\cdot x+25\cdot y\in\{121,242\}$ care nu are soluţii în $\{1,2,...,9\}\times\{0,1,...,9\}$.

4. Dacă numerele x,y,z sunt distincte, atunci cel puţn două au aceeaş paritate, deci cel puţin una dintre parantezele $x+y, y+z, z+x$ este pară şi atunci $(x+y)(y+z)(z+x)$ este număr par. Dar p este număr prim, deci $p=2$. Rămâne $(x+y)(y+z)(z+x)=90$. Numărul 90 poate fi scris ca produs de trei factori în mai multe moduri, dar condiţia x,y,z nenule, distincte ne spune că oricare dintre cele trei paranteze este mai mare sau egală cu 3. Rămâne singura posibilitate, în condiţiile date, $90=3\cdot 5\cdot 6$.

Relaţia fiind simetrică în x,y şi z putem avea: $x+y=3; y+z=5; z+x=6,$ de unde $x=1; y=2; z=4$ sau orice altă combinaţie între 1, 2 şi 4.