CLASA a VII a

1.

b) Fie $a=(2n)^{2^{2010}}+1$

1) Pentru $n=0 \Rightarrow a=1$

2) Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $a=(2n)^{2^{2010}}+1$ este impar .

Dacă $a=x+y$, cu x, y numere prime atunci x este par şi y impar $\Rightarrow x=2 \Rightarrow y=a-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\left[(2n)^{2^{2009}}-1\right]\left[(2n)^{2^{2009}}+1\right]$ care nu este prim.

2.

Fie F punctul de intersecţie dintre AE şi DC. Din faptul că $[AF$ este bisectoarea unghiului $\measuredangle(DAB)$ rezultă că $\measuredangle(DAF)=\measuredangle(BAF)$. În plus, $AB \| DC$; de unde $\measuredangle(DFA)=\measuredangle(BAF)$.Prin urmare, $\measuredangle(DAF)=\measuredangle(DFA)$ deci triunghiul DAF este isoscel cu $DA=DF$. Ţinâand cont că, din ipoteză, avem $DC=DA+AB$; deducem că $AB=CF$. Aşadar, $ABCF$ este paralelogram, de unde rezultă că $AE \| BC$.

b) Din $AE \| BC$ rezultă că $aria[BEC]=aria[BAC]$, iar din $AB \| CD$ rezultă că

$aria[BAD]=aria[BAC]$.Atunci $aria[BEC]=aria[BAD]$, ceea ce spune că triunghiurile BEC şi BAD sunt echivalente.

3.

Deoarece

$2^2+3^2+6^2=7^2 \Rightarrow 2^2\cdot 7^{2010}+3^2\cdot 7^{2010}+6^2\cdot 7^{2010}=7^{2012} \Leftrightarrow \left(2\cdot 7^{1005}\right)^2+\left(3\cdot 7^{1005}\right)^2+\left(6\cdot 7^{1005}\right)^2=7^{2012}$

deci B conţine tripletul $\left(2\cdot 7^{1005}, 3\cdot 7^{1005}, 6\cdot 7^{1005}\right)$ şi încă 5 obţinute prin permutări. În plus $(0,0,7^{1006}),(0,7^{1006},0),(7^{1006},0,0)\in B$. Aşadar $CardB \geq 9$.

$7^{2011}=7\cdot 7^{2010}=7\cdot 49^{1005}=7\cdot(8k_1+1)^{1005}=7\cdot(8k_2+1)=8k_3+7$. Dacă $a^2+b^2+c^2=7^{2011} \Rightarrow$

a,b,c impare toate trei sau unul este impar şi celelalte pare.

I. Dacă a impar, b,c pare $\Rightarrow a^2\in M_4+1, b^2, c^2\in M_4 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\in M_4+1$.

Dar $8k_3+7\in M_4+3$.

II. Dacă a,b,c impare $\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1\in M_8+1$ şi analog pentru b^2 şi $c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\in M_8+3$. Dar $8k_3+7\in M_8+7$.

Deci nu există $a,b,c\in\mathbb{N}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=7^{2011} \Rightarrow CardA=0$ şi $CardB \geq 9+CardA$.

4.

Din $5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2$ obţinem $5x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)=0$ sau $(x^2-y^2)(5x+2y)=0$, de unde $x=y; x=-y$ sau $x=-\frac{2y}{5}$. Înlocuind în fracţia dată obţinem $\frac{3x+4y}{4x+3y}\in\{1,-1,2\}$, deci număr întreg.

3.
Deoarece
$2^2+3^2+6^2=7^2 \Rightarrow 2^2\cdot 7^{2010}+3^2\cdot 7^{2010}+6^2\cdot 7^{2010}=7^{2012} \Leftrightarrow \left(2\cdot 7^{1005}\right)^2+\left(3\cdot 7^{1005}\right)^2+\left(6\cdot 7^{1005}\right)^2=7^{2012}$
deci B conţine tripletul $\left(2\cdot 7^{1005},3\cdot 7^{1005},6\cdot 7^{1005}\right)$ şi încă 5 obţinute prin permutări. În plus
$(0,0,7^{1006}),(0,7^{1006},0),(7^{1006},0,0)\in B$. Aşadar $CardB\geq 9$.
$7^{2011}=7\cdot 7^{2010}=7\cdot 49^{1005}=7\cdot(8k_1+1)^{1005}=7\cdot(8k_2+1)=8k_3+7$. Dacă $a^2+b^2+c^2=7^{2011}\Rightarrow$
a,b,c impare toate trei sau unul este impar şi celelalte pare.
I. Dacă a impar, b,c pare $\Rightarrow a^2\in M_4+1, b^2,c^2\in M_4 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\in M_4+1$.
Dar $8k_3+7\in M_4+3$.
II. Dacă a,b,c impare $\Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4k(k+1)+1\in M_8+1$ şi analog pentru b^2
şi $c^2 \Rightarrow a^2+b^2+c^2\in M_8+3$. Dar $8k_3+7\in M_8+7$.
Deci nu există $a,b,c\in\mathbb{N}$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=7^{2011}\Rightarrow CardA=0$ şi $CardB\geq 9+CardA.$

4.
Din $5x^3+2x^2y=2y^3+5xy^2$ obţinem $5x(x^2-y^2)+2y(x^2-y^2)=0$ sau $(x^2-y^2)(5x+2y)=0$, de unde $x=y; x=-y$ sau $x=-\frac{2y}{5}$. Înlocuind în fracţia dată obţinem $\frac{3x+4y}{4x+3y}\in\{1,-1,2\}$, deci număr întreg.