

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 12.02.2011, BOTOȘANI
Clasa a VII-a

BAREM DE CORECTARE

SUBIECTUL I

1. $a = [3^{666} - |2^{999} - 3^{666}|] : [(-8)^3]^{111} = [3^{666} - |2^{999} - 3^{666}|] : [(-8)^3]^{111} =$
 $= [3^{666} - (3^{666} - 2^{999})] : [(-2^3)^3]^{111} = 2^{999} : (-2^{999}) = -1 \dots\dots\dots 1p$
 $b = (\sqrt{2} - 1) + (3 - \sqrt{2}) - 1 = 1$ și finalizare $\dots\dots\dots 1p$

2. $\sqrt{\frac{5x+2}{x-3}}$ este număr natural dacă și numai dacă $\frac{5+2x}{x-3}$ este număr natural pătrat perfect. $\dots\dots\dots 1p$
 $\frac{5x+2}{x-3} \in \mathbb{N}$ și $x \in \mathbb{Z}$ implică $x - 3 \mid 5x + 2$ de unde se obține $x - 3 \in D_{17}$ și rezultă
 $x \in \{-14; 2; 4; 20\} \dots\dots\dots 2p$
 Argumentează că singura soluție este $-14 \dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL II

Din condiția b) se deduce că mulțimile A și B sunt disjuncte. $\dots\dots\dots 1p$

Din c) și a) deducem că numărul elementelor mulțimii $A \cup B$ este impar și, conform condiției b) avem:

$A = \{n, n+1, n+2, n+3, \dots, n+k\}$ și $B = \{n+k+1, n+k+2, n+k+3, \dots, n+2k\}$, unde $n, k \in \mathbb{N}^*$ $\dots\dots\dots 2p$

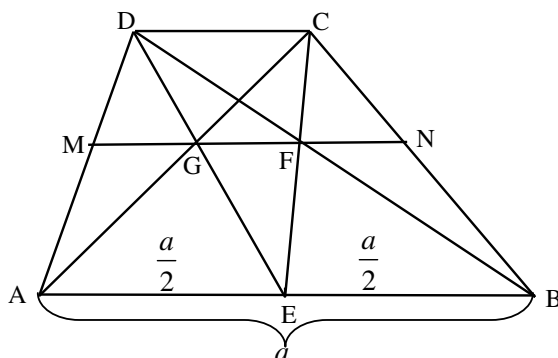
Condiția d) conduce la: $n(k+1) + \frac{k(k+1)}{2} = nk + k^2 + \frac{k(k+1)}{2}$, de unde se deduce că $n = k^2$ $\dots\dots\dots 2p$

Deci mulțimile A și B sunt de forma:

$A = \{k^2, k^2 + 1, k^2 + 2, \dots, k^2 + k\}$ și $B = \{k^2 + k + 1, k^2 + k + 2, k^2 + k + 3, \dots, k^2 + 2k\}$, unde $k \in \mathbb{N}^*$

Prin urmare, există o infinitate de mulțimi A și B care satisfac condițiile date. $\dots\dots\dots 2p$

SUBIECTUL III



a) Din asemănarea triunghiurilor AGE și CGD (*t.f.a.*) și asemănarea triunghiurilor BFE și DFC (*t.f.a.*) se deduce, folosind ipoteza $AE=BE$, că $\frac{GE}{GD} = \frac{EF}{CF}$, $\dots\dots\dots 2p$

de unde, cu reciproca teoremei lui Thales în triunghiul CDE , rezultă paralelismul dreptelor GF și CD cum AB și CD sunt paralele, se obține $FG \parallel AB$ 1p

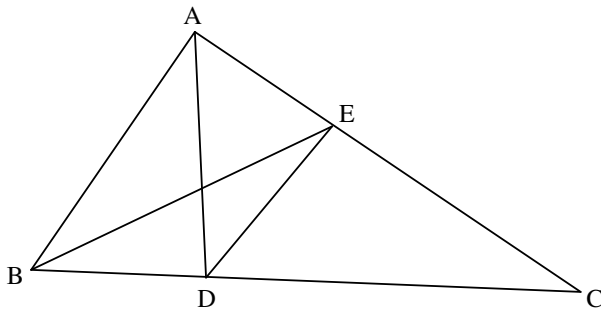
b) Demonstrează că $MG = GF = FN$; rezultă $MN = 3FG$ 1p

Din $GF \parallel CD$ rezultă $\triangle GEF \sim \triangle DEC$ ceea ce implică (1) $\frac{GF}{b} = \frac{EG}{DE}$ 1p

Din $\triangle GEA \sim \triangle GDC$ (t.f.a.) se obține $\frac{EG}{DE} = \frac{AE}{CD} = \frac{a}{2b}$, de unde rezultă (2) $\frac{EG}{DE} = \frac{a}{a+2b}$ 1p

Din (1) și (2) se deduce că $GF = \frac{ab}{a+2b}$, deci $MN = \frac{3ab}{a+2b}$ 1p

SUBIECTUL IV



a) Cu teorema bisectoarei se obține $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$ și cum $AD=CE$, rezultă

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{BC} \dots\dots\dots 2p$$

Din $\frac{AE}{AD} = \frac{AB}{BC}$ și $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC$, rezultă $\triangle ADE \sim \triangle BCA$ (l.u.l), ceea ce implică $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle BAC$. 1p

$DE \parallel AB$ implică $m(\sphericalangle AED) + m(\sphericalangle BAC) = 180^\circ$ și rezultă $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$ 1p

b) Din $m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$ și $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle ABC$ se deduce că $AD \perp BC$ 2p

Triunghiurile ADB și CED sunt congruente (C.U.), deci $[CD] \equiv [AB]$ 1p