BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a VI-a

1.a) $2^a \cdot 2^b = 2^{2011} \Leftrightarrow 2^{a+b} = 2^{2011} \Leftrightarrow a + b = 2011$

Fie d cel mai mare divizor comun al numerelor a si b, d = (a,b);
atunci a = dx si b = dy cu (x,y) = 1;
relatia $a + b = 2011$ devine dx+dy = 2011 adica d(x+y) = 2011 din care rezulta ca d divide 2011
si cum 2011 e prim deducem ca d = 2011 sau d = 1.
Daca d = 2011 atunci x+y = 1 de unde x = 0 sau y = 0 de unde rezulta ca a = 0 sau b = 0 ceea ce contrazice $a, b \in N^*$ deci d = 1 adica a si b sunt prime intre ele. (3p)

b) Presupunem ca $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt toate distincte.
Fara a restrange generalitatea problemei , fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$;
Relatia $2^{2011} = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n}$ devine
$2^{2011} = 2^{a_1}(1 + 2^{a_2 - a_1} + \cdots + 2^{a_n - a_1})$ echivalenta cu
$2^{2011 - a_1} = 1 + 2^{a_2 - a_1} + \cdots + 2^{a_n - a_1}$;
$2^{2011 - a_1}$ este un numar par iar $1 + 2^{a_2 - a_1} + \cdots + 2^{a_n - a_1}$ este impar .
Egalitatea de mai sus este intre un numar par si unul impar ceea ce este imposibil deci $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nu pot fi toate distincte. (4p)

2. Notăm cu x cel mai mare divizor comun pentru oricare două dintre cele trei numere . Avem $a = x \cdot m$; $b = x \cdot n$; $c = x \cdot p$ cu $(m,n) = 1$; $(n,p) = 1$; $(m,p) = 1$, unde (m,n) este c.m.m.d.c. dintre m si n etc. (2p)
Rezultă: $[a,b] = x \cdot m \cdot n$; $[b,c] = x \cdot n \cdot p$; $[a,c] = x \cdot m \cdot p$. (2p)
Din: $[a,b]^2 = [b,c] \cdot [a,c]$ avem :

$$x^2 \cdot m^2 \cdot n^2 = x^2 \cdot m \cdot n \cdot p^2 \Rightarrow x^2 \cdot m \cdot n = x^2 \cdot p^2 \Rightarrow x \cdot m \cdot x \cdot n = (x \cdot p)^2 \Rightarrow a \cdot b = (x \cdot p)^2 .$$

Deci $a \cdot b$ pătrat perfect . (3p)

3.

a) Presupunem că unghiurile au măsuri diferite şi făcând suma măsurilor lor se obţine:
$1 + 2 + 3 + \ldots + 17 + 18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 9 \cdot 19 = 171° > 170° \Rightarrow$ cel puţin două unghiuri sunt congruente. (4p)

b) Notăm măsura celor 5 unghiuri congruente cu $x \in$ **N***şi se obţine:

$$1 + 2 + \ldots + 12 + 13 + 5x = 170° \Rightarrow \frac{13 \cdot 14}{2} + 5x = 170° \Rightarrow 13 \cdot 7 + 5x = 170° \Rightarrow 5x = 170° - 91° \Rightarrow$$

$$5x = 79° \Rightarrow x = 79° : 5 \Rightarrow x = 15\frac{4}{5} \Rightarrow x_{\max} = 15° .$$

(3p)