Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_4 = 27$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2} = 9^{1-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Calculaţi sinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $BC = 5$ şi $\sin C = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale m știind că $A(m)\cdot A(-m) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det\left(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)\right) = -51^2 \cdot 101^3$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 4x - 4y + 20$.

5p **a)** Calculaţi $3 \circ 4$.

5p **b)** Arătaţi că $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}} = 5$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x + e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{\left(x + e^x\right)^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x) \geq \frac{e}{e+1}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 xe^{-nx^2}\,dx$.

5p **a)** Calculaţi I_0.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1} \leq I_n$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Demonstrați că $I_n = \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+x+1\right)=\log_5(x+2)$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10% preţul unui produs este 90 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y=x-1$ şi punctul $A(2,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.

5p **6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ şi $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det\left(A(x)\right)=0$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 și x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătaţi că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m știind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $x\geq \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^3 \frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(1)=-1$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_2^e \frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3\left(4-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}=12$.

5p **2.** Calculaţi $f(-4)+f(4)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-16$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x-2)^2-x^2+8=0$.

5p **4.** Preţul unui obiect este 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o ieftinire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(2,1)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculaţi $\cos A$, ştiind că $\sin A=\frac{1}{2}$ şi unghiul A este ascuţit.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real b pentru care $A\cdot B=2I_2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

5p **a)** Calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X-2$.

5p **c)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3$.

5p **a)** Verificaţi dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Verificaţi dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*

Varianta 9

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3\left(1+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}=3$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$. Arătaţi că $f(-3)+f(3)=6$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+3)^2-x^2-15=0$

5p **4.** După o scumpire cu 10% preţul unui produs este 220 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,3)$ şi $R(4,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului PR.

5p **6.** Determinaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, ştiind că $BC=20$ şi $\cos B=\dfrac{2}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **1.** Calculaţi $3\circ(-2)$.

5p **2.** Verificaţi dacă legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă.

5p **3.** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale *x* şi *y*.

5p **4.** Determinaţi numerele reale *x* pentru care $x\circ x=x$.

5p **5.** Verificaţi dacă $x\circ(-2)=-2$, pentru orice număr real *x*.

5p **6.** Calculaţi $(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-2)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$.

5p **1.** Calculaţi $\det(A(0))$.

5p **2.** Arătaţi că $\det(A(m))=5m-4$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det(A(m))=m^2$.

5p **4.** Arătaţi că $A(m)+A(-m)=2A(0)$ pentru orice număr real m.

5p **5.** Verificaţi dacă $A(0)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -2\\ -7 & 3 & 5\end{pmatrix}=-4I_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **6.** Pentru $m=0$, rezolvaţi sistemul $\begin{cases}x+2y+z=2\\ -x+3y+z=3\\ 2x+y+mz=1\end{cases}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 \Rightarrow q^3 = 27$ $q = 3$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 3$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$3^{x+2} = 3^{2(1-x)} \Rightarrow x+2 = 2-2x$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre, pătrate perfecte, sunt 16, 25, 36, 49, 64 şi 81 $\Rightarrow$ 6 cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ $AC = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$ $\sin A = 1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1$	**2p** **3p**
b)	$A(m) \cdot A(-m) = \begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1-2m & 1 & 1-m \\ m & m & m \\ m-m^2 & m & m-m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 1$	**3p** **2p**
c)	$A(1) + A(2) + \ldots + A(101) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 101 & 0 & 0 \\ 101 & 0 & 101 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{pmatrix}$ $\det(A(1) + A(2) + \ldots + A(101)) = \begin{vmatrix} 101 & 101 & 101 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 0 \\ 101 \cdot 51 & 0 & 101 \cdot 51 \end{vmatrix} = -51^2 \cdot 101^3$	**3p** **2p**

2.a)	$3\circ 4=3\cdot 4-4\cdot 3-4\cdot 4+20=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=x(y-4)-4(y-4)+4=$ $=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x=(x-4)^2+4$ $\underbrace{x\circ x\circ ...\circ x}_{x \text{ de } 2013 \text{ ori}}=(x-4)^{2013}+4$ $(x-4)^{2013}+4=5\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x+e^x\right)-e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=$ $=\dfrac{(x-1)e^x}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x+e^x}=1$ Ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=1$	**3p** **2p**
c)	$f'(1)=0$; $f'(x)\le 0$, pentru $x\in(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru $x\in[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge\dfrac{e}{e+1}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_0=\int_0^1 xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}\left(e^{-x^2}-1\right)dx$ Pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $x\in[0,1]$ avem $e^{-nx^2}>0$ şi $e^{-x^2}-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $I_n=\int_0^1 xe^{-nx^2}dx=-\dfrac{1}{2n}\int_0^1 (e^{-nx^2})'dx=$ $=-\dfrac{1}{2n}e^{-nx^2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2n}\left(1-\dfrac{1}{e^n}\right)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$3(2+5i)=6+15i$	**2p**
	$5(1+3i)=5+15i$	**2p**
	$a=1\in\mathbb{R}$	**1p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow(x+5)^2=0$	**2p**
	$x=-5$ şi $y=0$	**3p**
3.	$x^2+x+1=x+2$	**3p**
	Rezultă $x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul înainte de ieftinire $\Rightarrow x-\frac{10}{100}\cdot x=90$	**3p**
	$x=100$	**2p**
5.	$d\parallel h\Rightarrow m_d=m_h=1$	**3p**
	$d: y-2=1\cdot(x-2)$, deci $d: y=x$	**2p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\6&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2A(4)$	**2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&0\\x&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=3-x$	**3p**
	$3-x=0\Rightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A(2))=1$	**2p**
	$(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&-1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-m+m=0$	**2p**
	Rezultă $X+1$ divide polinomul f	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-1,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$	**2p**
	$1-2m=11\Rightarrow m=-5$	**1p**

c)	$x_1=-1\Rightarrow \lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-m$	**1p**
	$\lvert m\rvert=1\Rightarrow m=-1$ sau $m=1$; ambele valori verifică cerința	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=0\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=1$	**3p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)<0$, pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(1)\Rightarrow x\ge \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^3\frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\int_2^3(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg\rvert_2^3=$	**3p**
	$=\dfrac{15}{2}-4=\dfrac{7}{2}$	**2p**
b)	$f(x)=x^3-x\Rightarrow$ primitiva F a funcției f este $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=-1\Rightarrow c=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{4}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_2^e\frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\int_2^e x\ln x\,dx=$	**2p**
	$\displaystyle=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg\rvert_2^e-\frac{1}{2}\int_2^e x\,dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(4-\sqrt{3}\right)=12-3\sqrt{3}$ $12-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=12$	**2p** **3p**
2.	$f\left(-4\right)=0$ $f\left(4\right)=0\Rightarrow f\left(-4\right)+f\left(4\right)=0$	**2p** **3p**
3.	$\left(x-2\right)^2=x^2-4x+4$ $x=3$	**2p** **3p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot 100=30$ Preţul după ieftinire este 70 de lei	**2p** **3p**
5.	$AB=\sqrt{\left(2-2\right)^2+\left(1-4\right)^2}$ $AB=3$	**3p** **2p**
6.	$\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow\cos^2 A=\frac{3}{4}$ $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4-0=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2b & 2-2b\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$ $A\cdot B=2I_2\Leftrightarrow b=1$	**3p** **2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}2+b & -1\\ 0 & 2+b\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+B)=(2+b)^2$ $(2+b)^2=0\Leftrightarrow b=-2$	**3p** **2p**
2.a)	$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1=$ $=1-3+2=0$	**2p** **3p**
b)	Câtul este X^2-X Restul este 0	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot 2=5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x^3+6x^2+12x+8)'=$	**2p**
	$=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=3(x+2)^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+12x+12}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3+\frac{12}{x}+\frac{12}{x^2}\right)}{x^2}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)'=x^2+1$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{3}$	**2p**
c)	$\int_1^2\dfrac{f(x)}{x}dx=\int_1^2\dfrac{x^2+1}{x}dx=\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\right\vert_1^2=\dfrac{3}{2}+\ln 2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013

Proba E. c)
Matematică *M_pedagogic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ $3+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=3$	**2p** **3p**
2.	$f(-3)=0$ $f(3)=6 \Rightarrow f(-3)+f(3)=6$	**2p** **3p**
3.	$(x+3)^2=x^2+6x+9$ $x=1$	**2p** **3p**
4.	$x+\frac{10}{100}x=220$, unde x reprezintă preţul înainte de scumpire Preţul înainte de scumpire este 200 de lei	**2p** **3p**
5.	M mijlocul lui $(PR) \Rightarrow x_M=\frac{x_P+x_R}{2}$ şi $y_M=\frac{y_P+y_R}{2}$ $x_M=3$ $y_M=3$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}$ $AB=8$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$3\circ(-2)=-6+6+(-4)+2=$ $=-2$	**3p** **2p**
2.	$x\circ y=xy+2x+2y+2$ şi $y\circ x=yx+2y+2x+2$, pentru orice numere reale x şi y $x\circ y=y\circ x$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
3.	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$ $=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**2p** **3p**
4.	$x\circ x=(x+2)^2-2$ $(x+2)^2-2=x \Leftrightarrow x=-2$ sau $x=-1$	**2p** **3p**
5.	$x\circ(-2)=(x+2)(-2+2)-2$ $=-2$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
6.	$(-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-2)=\left((-2013)\circ(-2012)\circ\ldots\circ(-3)\right)\circ(-2)=$ $=-2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{vmatrix}=-4$	**3p**
2.	$\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&m\end{vmatrix}=3m-1+4-6+2m-1=$	**3p**
	$=5m-4$	**2p**
3.	$\det\left(A(m)\right)=m^2 \Leftrightarrow m^2-5m+4=0$	**3p**
	$m=1$ sau $m=4$	**2p**
4.	$A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&-m\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2&4&2\\-2&6&2\\4&2&0\end{pmatrix}=2A(0)$	**3p**
5.	$A(0)\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-2\\-7&3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\-1&3&1\\2&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-2&-2\\-7&3&5\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}=-4I_3$	**3p**
6.	$\begin{cases}x+2y+z=2\\-x+3y+z=3\\2x+y=1\end{cases}$	**2p**
	$x=0,\ y=1,\ z=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ şi $a_3 = 8$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x = \log_3(4 - x)$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 4.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(4,1)$. Determinaţi coordonatele punctului M ştiind că $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
5p	**6.** Arătaţi că $4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = 1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & m+1 \\ 2 & m+1 & 2 \\ m+1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați $\det(A(-1))$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $A(0)\cdot A(1) = 5A(1)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.
	2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = xy - 2x - 2y + 6$.
5p	**a)** Verificaţi dacă $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**b)** Arătaţi că $x \circ 2 = 2 \circ x = 2$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Calculaţi $1 \circ 2 \circ 3 \circ \ldots \circ 2012 \circ 2013$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2x}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x}$.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.
5p	**a)** Arătaţi că $I_1 = \frac{e-2}{e}$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $I_{n+1} = (n+1)I_n - \frac{1}{e}$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Arătaţi că $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $x=3(1-i)+3i$ este real.

5p **2.** Calculaţi distanţa dintre punctele de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+3}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,20\}$, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(3,0)$ şi $C(2,5)$. Calculaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{6}$ şi $C=\frac{\pi}{3}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 1-x \\ 1-x & x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(M(2))$.

5p **b)** Verificaţi dacă $M(x)\cdot M(y)=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real a astfel încât $M(a)\cdot M(x)=M(a)$, pentru orice număr real x.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Calculaţi $0\circ(-2)$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x=6$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $2\left(2+\sqrt{3}\right)-2\sqrt{3}=4$.

5p **2.** Calculaţi $f(4)+f(-4)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $7^{2x}=49$.

5p **4.** Preţul unui obiect este 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ şi $B(4,1)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6**. Calculaţi $\sin 45°-\sin 135°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Pentru $m=-2$, arătaţi că $A+B=O_2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m pentru care $A\cdot B=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X$.

5p **a)** Arătaţi că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2+X$.

5p **c)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+10-\dfrac{11}{x}$.

5p **a)** Verificaţi dacă $f'(x)=\dfrac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+9$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2 f'(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x}dx=\dfrac{3}{2}+9\ln 2$.

5p **c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x^2$ este egal cu 81π.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_3=\frac{(a_1+a_3)\cdot 3}{2}=\frac{(2+8)\cdot 3}{2}=$ $=15$	**3p** **2p**
2.	$x_V=2$ $y_V=-2$	**2p** **3p**
3.	$x=4-x$ Rezultă $x=2$, care verifică ecuaţia	**3p** **2p**
4.	Numerele de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 4 sunt 14, 22 şi 41 $\Rightarrow 3$ cazuri favorabile Numărul de numere naturale de două cifre este $90\Rightarrow 90$ de cazuri posibile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{30}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ şi $\overrightarrow{AM}=(x_M-1)\vec{i}+(y_M-1)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\begin{cases}x_M=2\\ y_M=1\end{cases}$	**2p** **3p**
6.	$4\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2\sin\frac{\pi}{6}=$ $=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-1))=\begin{vmatrix}2&2&0\\2&0&2\\0&2&2\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-8-8=-16$	**2p** **3p**
b)	$A(0)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}10&10&10\\10&10&10\\10&10&10\end{pmatrix}=5A(1)$	**2p** **3p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&2&m+1\\2&m+1&2\\m+1&2&2\end{vmatrix}=-(m+5)(m-1)^2$ $\det(A(m))=0\Leftrightarrow m=-5$ sau $m=1$	**3p** **2p**

2.a)	$xy-2x-2y+6=x(y-2)-2(y-2)+2=$ $=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2$, pentru orice număr real x $2\circ x=(2-2)(x-2)+2=2 \Rightarrow x\circ 2=2\circ x=2$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=(1\circ 2)\circ 3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013=$ $=2\circ(3\circ\ldots\circ 2012\circ 2013)=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^3-1)'(x^2+1)-(x^3-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$ $=\dfrac{3x^2(x^2+1)-2x(x^3-1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x^4+3x^2+2x}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=$ $=0$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2}{x-1}\cdot\frac{x^3-1}{x^2+1}}=$ $=e^2$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1 xe^{-x}dx=-xe^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx=$ $=-\dfrac{1}{e}-e^{-x}\Big\vert_0^1=\dfrac{e-2}{e}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}=\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=-x^{n+1}e^{-x}\Big\vert_0^1+(n+1)\int_0^1 x^n e^{-x}dx=$ $=-\dfrac{1}{e}+(n+1)I_n$	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și pentru orice $x\in[0,1]$ avem $0<e^{-x}\le 1\Rightarrow 0\le x^n e^{-x}\le x^n$ $0\le\int_0^1 x^n e^{-x}dx\le\int_0^1 x^n dx \Rightarrow 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(1-i)=3-3i$ $x=3\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow x=1$ sau $x=2$ Distanţa este egală cu 1	**3p** **2p**
3.	$2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Numerele din mulţimea A divizibile cu 4 sunt 4, 8, 12, 16 şi $20\Rightarrow 5$ cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulţimii A este $20\Rightarrow 20$ de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{4}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Mijlocul segmentului (AC) este $M(0,4)$ $BM=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$	**2p** **3p**
6.	$A=\dfrac{\pi}{2}$ $AC=\dfrac{1}{2}\cdot BC=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(M(2))=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$ $=4-1=3$	**2p** **3p**
b)	$M(x)\cdot M(y)=\begin{pmatrix}xy+(1-x)(1-y) & x(1-y)+(1-x)y\\ (1-x)y+x(1-y) & (1-x)(1-y)+xy\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1 & 1-(2xy-x-y+1)\\ 1-(2xy-x-y+1) & 2xy-x-y+1\end{pmatrix}=M(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$M(a)\cdot M(x)=M(a)\Leftrightarrow M(2ax-a-x+1)=M(a)$, pentru orice număr real x $2ax-a-x+1=a$, pentru orice număr real x $a=\dfrac{1}{2}$	**1p** **2p** **2p**
2.a)	$0\circ(-2)=0\cdot(-2)+2\cdot0+2\cdot(-2)+2=$ $=-2$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+2=x(y+2)+2(y+2)-2=$ $=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**
c)	$x\circ x\circ x=(x+2)^3-2$ $(x+2)^3-2=6\Rightarrow x=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)-\left(x^2-2x+2\right)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x(x-2)=0\Rightarrow x=2$, deoarece $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f'(2)=0$; $f'(x)<0$, pentru $x\in(1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	Punctul de extrem este $x=2$	**1p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=-1$	**2p**
	Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y=x-1$	**1p**
2.a)	$\int_1^2\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 xdx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\|_1^2=\dfrac{3}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}\right)'=x^{\frac{3}{2}}=x\sqrt{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^4\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^4 x\sqrt{x}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{2}{5}\cdot x^2\sqrt{x}\Big\|_1^4=\dfrac{62}{5}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\left(2+\sqrt{3}\right)=4+2\sqrt{3}$ $4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=4$	**2p** **3p**
2.	$f(4)=8$ $f(-4)=0$ $f(4)+f(-4)=8$	**2p** **2p** **1p**
3.	$7^{2x}=7^2$ $x=1$	**2p** **3p**
4.	$\frac{10}{100}\cdot 1000=100$ Preţul după scumpire este 1100 de lei	**2p** **3p**
5.	$AB=\sqrt{(4-4)^2+(1-3)^2}$ $AB=2$	**3p** **2p**
6.	$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\sin 45°-\sin 135°=0$	**2p** **2p** **1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=$ $=-5$	**3p** **2p**
b)	Pentru $m=-2$ avem $A+B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**3p** **2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2m-1 & m+2\\ m+2 & 3m+1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2m-1 & m+2\\ m+2 & 3m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 7\\ 7 & 16\end{pmatrix}\Leftrightarrow m=5$	**3p** **2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)^2+(-1)=$ $=-1+2-1=0$	**2p** **3p**

b)	Câtul este $X+1$ Restul este 0	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(-2)^2-2\cdot 1=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'+10'-\left(\frac{11}{x}\right)'=1-11\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=1+\frac{11}{x^2}=\frac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$x\in(0,+\infty)\Rightarrow x^2+11>0$ $f'(x)=\frac{x^2+11}{x^2}\Rightarrow f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,+\infty)$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=-\frac{22}{x^3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ $f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^2 f'(x)\,dx=f(x)\Big\vert_1^2=$ $=f(2)-f(1)=3$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2\left(x+\frac{9}{x}\right)dx=$ $=\left(\frac{x^2}{2}+9\ln x\right)\Big\vert_1^2=\frac{3}{2}+9\ln 2$	**2p** **3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(x^2+9-x^2\right)^2dx=$ $=\pi\cdot 81x\Big\vert_0^1=81\pi$	**2p** **3p**