Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, știind că $a_1 = 2$ și $a_2 = 5$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = a - x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{4-x} = 2^{2x+2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 5$, $AC = 12$ și $BC = 13$. Arătați că $\sin C = \frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Arătați că $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X + m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0) = m$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că derivata funcției f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$.

5p **b)** Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_1^e \frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx = \frac{1}{2015}$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=5-2=3$ $a_3=5+3=8$	**3p** **2p**
2.	$f(3)=5 \Leftrightarrow a-3=5$ $a=8$	**3p** **2p**
3.	$2^{3(4-x)}=2^{2x+2} \Leftrightarrow 12-3x=2x+2$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Sunt 9 numere naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 0, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$y-y_M=2(x-x_M)$ $y=2x-1$	**2p** **3p**
6.	$13^2=5^2+12^2$, deci triunghiul ABC este dreptunghic în A $\sin C=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p** **3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-x)(1-y)-2xy&0&(1-x)2y+2x(1+2y)\\0&1&0\\-x(1-y)-(1+2x)y&0&-2xy+(1+2x)(1+2y)\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1-(xy+x+y)&0&2(xy+x+y)\\0&1&0\\-(xy+x+y)&0&1+2(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^3-1\right)$, pentru orice număr real x $(x+1)^3-1=7 \Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
2.a)	$f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=$ $=0+0+0+m=m$	**3p** **2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(x_1+x_2+x_3\right)-3=-2\left((-2)^2-2\cdot 1\right)-(-2)-3=-5=5x_1x_2x_3$	**2p**
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f\left(x_1\right)=0\Leftrightarrow m=-x_1\left(x_1+1\right)^2$	**2p**
	Deoarece m este prim, obținem $\left(x_1+1\right)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=-2$, pentru care $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\left(x^2+1\right)'=$	**3p**
	$=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x)=-\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=-\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este descrescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^e\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_1^e\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	**2p**
c)	$\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^n x\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e=\frac{1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}\Leftrightarrow n=2014$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_1=1$ și rația $r=2$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(m,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{2}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.
5p	**b)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(A(a)\right)=0$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(2)+xA(3)\right)=0$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2$.
5p	**a)** Arătați că $(-1)*1=-1$.
5p	**b)** Arătați că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)*(2x-3)=5$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.
5p	**c)** Determinați coordonatele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 x\,f(x)\,dx=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.
5p	**c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-1\right)\ln x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = a_1 + r = 1 + 2 =$ $= 3$	**3p** **2p**
2.	$f(m) = 0 \Leftrightarrow m + 1 = 0$ $m = -1$	**3p** **2p**
3.	$x^2 + 4 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x_1 = -2$ și $x_2 = 2$, care verifică ecuația	**2p** **3p**
4.	Mulțimea M are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile În mulțimea M sunt 2 numere divizibile cu 3, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$\frac{a+1}{1} = \frac{4}{2}$ $a = 1$	**3p** **2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2014) = \begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2016) = \begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015) = \begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$ $A(2014) + A(2016) = \begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix} = 2A(2015)$	**3p** **2p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - a$ $3 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$	**3p** **2p**
c)	$A(2) + xA(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xA(3)) = x + 1$ $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$	**3p** **2p**
2.a)	$(-1) * 1 = -(-1) \cdot 1 - (-1) - 1 - 2 =$ $= 1 + 1 - 1 - 2 = -1$	**3p** **2p**
b)	$x * y = -xy - x - y - 1 - 1 =$ $= -x(y+1) - (y+1) - 1 = -(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**

c)	$(x+2)*(2x-3)=-(x+3)(2x-2)-1$	**2p**
	$x^2+2x=0 \Leftrightarrow x_1=-2$ și $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-16x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-4\right)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^2+16}{x^2+1}=$	**2p**
	$=-8$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x(x-2)(x+2)=0$	**2p**
	Coordonatele punctelor sunt $x_1=-2$, $y_1=0$; $x_2=0$, $y_2=16$ și $x_3=2$, $y_3=0$	**3p**
2.a)	$\int\limits_1^2 x f(x)dx=\int\limits_1^2(x+2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=6-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+\dfrac{2}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+2}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int\limits_1^e\lvert g(x)\rvert dx=\int\limits_1^e\dfrac{2}{x}\ln x\,dx=\ln^2 x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln^2 e-\ln^2 1=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{2}:0,5-1=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)+f(0)+f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 150 lei. Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=5$ și $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det M=4$.

5p **b)** Arătați că $M\cdot M+3M+4I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+5X-1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că $f(a)+f(-a)+2\le 0$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+4)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=12$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,5=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-1=0$	**3p**
2.	$f(-1)=0$, $f(0)=0$ și $f(1)=2$	**3p**
	$f(-1)+f(0)+f(1)=2$	**2p**
3.	$3x+1=25$	**3p**
	$x=8$, care verifică ecuația	**2p**
4.	30% din 150 este $\frac{30}{100}\cdot150=45$	**3p**
	Prețul după scumpire este $150+45=195$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-5)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	ΔABC este isoscel	**3p**
	$AB=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3M=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$M\cdot M+3M+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$M\cdot M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $aM+bI_2=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=5$, $b=12$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-5\cdot1^2+5\cdot1-1=$	**3p**
	$=1-5+5-1=0$	**2p**
b)	$f(a)=a^3-5a^2+5a-1$, $f(-a)=-a^3-5a^2-5a-1$	**2p**
	$f(a)+f(-a)+2=-10a^2\le0$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=5^2-2\cdot 5=15\cdot 1=15x_1x_2x_3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6=$	**3p**
	$=6\left(x^2-1\right)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-3$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$	**3p**
	$f(2012)\leq f(2013)$ și $f(2014)\leq f(2015)$, deci $f(2012)+f(2014)\leq f(2013)+f(2015)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 \left(f(x)+4\right)dx=\int\limits_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\mathcal{A}=\int\limits_0^1 \lvert g(x)\rvert dx=\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int\limits_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=\int\limits_1^a x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^a=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}$	**3p**
	$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=12\Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Varianta 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right):\frac{33}{16}=1$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a pentru care $f(2)+f(-2)=4$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+2}=3^{3x}$.
5p	**4.** Prețul unui obiect este 200 de lei. Determinați prețul obiectului după ce se scumpește de două ori, succesiv, cu câte 10%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(-3,4)$ și $B(3,4)$. Determinaţi distanţa de la punctul O la punctul M, știind că M este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Calculaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $m(\sphericalangle B)=45°$ şi $AB=AC=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-2015$.
5p	**1.** Arătați că $1007*1008=0$.
5p	**2.** Arătați că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.
5p	**3.** Verificaţi dacă $e=2015$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.
5p	**4.** Determinaţi numărul real x, știind că $x*x=2015$.
5p	**5.** Arătaţi că $x*(x+2015)=(x+1007)*(x+1008)$, pentru orice număr real x.
5p	**6.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x*25^x=-1985$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}a & b\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**1.** Arătați că $\det A=3$.
5p	**2.** Determinaţi numerele reale a și b astfel încât $B-A=4I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**3.** Pentru $a=0$, determinați numărul real b pentru care $\det B=9$.
5p	**4.** Determinați numerele reale a și b, știind că $AB=BA$.
5p	**5.** Arătaţi că inversa matricei A este matricea $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.
5p	**6.** Pentru $a=b=1$, rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuaţia $B\cdot X=A$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2+\left(\frac{1}{2}\right)^4=2+\frac{1}{16}=\frac{33}{16}$	**3p**
	$\frac{33}{16}:\frac{33}{16}=1$	**2p**
2.	$f(2)+f(-2)=(2+a)+(-2+a)=2a$	**3p**
	$2a=4\Leftrightarrow a=2$	**2p**
3.	$x^2+2=3x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ şi $x_2=2$	**2p**
4.	După prima scumpire cu 10%, preţul obiectului va fi $200+\frac{10}{100}\cdot 200=220$ de lei	**2p**
	După a doua scumpire cu 10%, preţul obiectului va fi $220+\frac{10}{100}\cdot 220=242$ de lei	**3p**
5.	$M(0,4)$	**2p**
	$OM=4$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	$1007*1008=1007+1008-2015=$	**3p**
	$=2015-2015=0$	**2p**
2.	$(x*y)*z=(x+y-2015)+z-2015=x+y+z-4030$	**2p**
	$x*(y*z)=x+(y+z-2015)-2015=x+y+z-4030=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y şi z	**3p**
3.	$x*2015=x+2015-2015=x$	**2p**
	$2015*x=2015+x-2015=x=x*2015$, pentru orice număr real x, deci $e=2015$ este element neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
4.	$x+x-2015=2015$	**3p**
	$x=2015$	**2p**
5.	$x*(x+2015)=x+(x+2015)-2015=2x$	**2p**
	$(x+1007)*(x+1008)=(x+1007)+(x+1008)-2015=2x=x*(x+2015)$, pentru orice număr real x	**3p**
6.	$5^x+5^{2x}-30=0\Leftrightarrow\left(5^x\right)^2+5^x-30=0$	**2p**
	$5^x=5\Leftrightarrow x=1$	**2p**
	$5^x=-6$ nu are soluţie	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-(-1)\cdot 3=$	**3p**
	$=0+3=3$	**2p**
2.	$\begin{pmatrix}a-1 & b+1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=5$ și $b=-1$	**2p**
3.	$\det B=\begin{vmatrix}0 & b\\ 3 & 4\end{vmatrix}=0\cdot 4-b\cdot 3=-3b$	**3p**
	$-3b=9\Leftrightarrow b=-3$	**2p**
4.	$AB=\begin{pmatrix}a-3 & b-4\\ 3a & 3b\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}a+3b & -a\\ 15 & -3\end{pmatrix}$	**2p**
	$AB=BA\Leftrightarrow a=5$ și $b=-1$	**3p**
5.	$A\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$, deci matricea $\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{3}\\ -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ este inversa matricei A	**2p**
6.	$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\det B=1$, $B^{-1}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=B^{-1}\cdot A\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 2015$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(6,3)$ şi $C(4,0)$. Determinaţi coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Calculaţi lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=1$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a&a+1\\0&1&a+2\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a)-2A(a)+I_3=O_3$, unde $A^2(a)=A(a)A(a)$.

5p **c)** Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(100)=50A(51)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1=x_2+x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $e^x(x-3)^2\leq 4e$, pentru orice $x\in(-\infty, 3]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^3\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\frac{3}{4}$.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_2 - a_1 = 2015 - 1 =$	**3p**
	$= 2014$	**2p**
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4) =$	**3p**
	$= 4 + 1 = 5$	**2p**
3.	$x^2 - 8x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$	**3p**
	$x_1 = -1$ și $x_2 = 9$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 4 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 3 moduri	**2p**
	Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 2 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ de numere	**3p**
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 1$	**3p**
	$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 0$	**2p**
6.	$A = \frac{\pi}{2}$	**2p**
	$BC = 2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	**3p**
b)	$A^2(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 + 4a + 2 \\ 0 & 1 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $2A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 2a + 2 \\ 0 & 2 & 2a + 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	**2p**
	$A^2(a) - 2A(a) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**1p**
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 + 2a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2 + 2a = 0 \Leftrightarrow a_1 = -2$ și $a_2 = 0$	**2p**
c)	$A(2) + A(100) = 2A(51)$, $A(4) + A(98) = 2A(51)$, ..., $A(50) + A(52) = 2A(51)$	**3p**
	$A(2) + A(4) + A(6) + \ldots + A(100) = 25 \cdot 2A(51) = 50A(51)$	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-4\cdot 0^2+m\cdot 0+2=$ $=2$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1=x_2+x_3 \Leftrightarrow x_1=2$ $f(2)=0 \Leftrightarrow 2m-6=0 \Leftrightarrow m=3$	**2p** **3p**
c)	$f=X^3-4X^2+8X+2$, $x_1+x_2+x_3=4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$ Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=$ $=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=3$ $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$ $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
c)	$f(x)\le f(1)$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$ Cum $f(1)=4e$, obținem $e^x(x-3)^2\le 4e$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(-x^3\right)\left(1-x^3\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n și $x\in[0,1]$ avem $-x^3\le 0$ și $\left(1-x^3\right)^n\ge 0 \Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^3\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^3\right)^{n+1}\Big\|_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^3\right)^n\left(-3x^2\right)dx=$ $=3(n+1)\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\int_0^1\left(1-x^3-1\right)\left(1-x^3\right)^n dx=-3(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $I_{n+1}=\frac{3(n+1)}{3n+4}I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 + i$ și $z_2 = 3 - i$. Arătați că numărul $z_1 z_2$ este real.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a, știind că punctul $A(1,1)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + a$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^3 + 2x - 4} = x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1, 2, 3, ..., 80\}$, acesta să fie divizibil cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(1,2)$ și $B(2,a)$. Determinați numărul real a, știind că punctele O, A și B sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 4$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, știind că $A(1) + A(3) = a\,A(2)$.
5p	**c)** Arătați că $A(x)A(y) = 2A(x+y) + xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 3xy + 6x + 6y + 10$.
5p	**a)** Arătați că $2 * (-2) = -2$.
5p	**b)** Arătați că $x * y = 3(x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = (x+2)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $[-3, +\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} (x^2+1) f(x)\,dx = 0$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} + \ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real m, $m > 0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = m$, are aria egală cu $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 z_2 = (3+i)(3-i) = 9 - i^2 =$	**3p**
	$= 10$, care este număr real	**2p**
2.	$f(1) = 1 \Leftrightarrow 1 + a = 1$	**3p**
	$a = 0$	**2p**
3.	$x^3 + 2x - 4 = x^3 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 80 de elemente, deci sunt 80 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 11 numere divizibile cu 7, deci sunt 11 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{11}{80}$	**2p**
5.	$m_{OA} = 2$ și $m_{OB} = \frac{a}{2}$	**2p**
	$m_{OA} = m_{OB} \Leftrightarrow a = 4$	**3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} =$	**2p**
	$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 =$	**3p**
	$= 4 - 0 = 4$	**2p**
b)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A(3) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 2$	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 4+xy & 2x+2y \\ 2x+2y & 4+xy \end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(x+y) + xyI_2 = 2\begin{pmatrix} 2 & x+y \\ x+y & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+xy & 2(x+y) \\ 2(x+y) & 4+xy \end{pmatrix} = A(x)A(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

2.a)	$2*(-2)=3\cdot 2\cdot(-2)+6\cdot 2+6\cdot(-2)+10=$	**3p**
	$=-12+12-12+10=-2$	**2p**
b)	$x*y=3xy+6x+6y+12-2=$	**2p**
	$=3x(y+2)+6(y+2)-2=3(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*x*x=9(x+2)^3-2$	**2p**
	$9(x+2)^3-2=x \Leftrightarrow x_1=-\frac{7}{3}$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{5}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot e^x+(x+1)\cdot(e^x)'=$	**2p**
	$=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=2$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2x+1$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+3)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci f este convexă pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}(x^2+1)\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{-1}^{1}(x^3+3x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Big\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_{0}^{1}\left(x+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)\right)\Big\|_{0}^{1}=\frac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{0}^{m}\|g(x)\|dx=\int_{0}^{m}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)\Big\|_{0}^{m}=\ln(m^2+1)$	**3p**
	$\ln(m^2+1)=\ln 2\Leftrightarrow m^2+1=2$ și, cum $m>0$, obținem $m=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că media geometrică a numerelor $a=16$ și $b=9$ este egală cu 12.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}=3^5$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 2.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin x=\frac{1}{2}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4&0\\0&4\end{pmatrix}$ și $C(x)=\begin{pmatrix}x&1\\2&3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-5$.
5p	**b)** Arătați că $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=B$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-6X+3$.
5p	**a)** Arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X-3.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}$.
5p	**c)** Arătați că $-1\leq f(x)\leq 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=5$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2015$ este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_g=\sqrt{16\cdot 9}=$ $=4\cdot 3=12$	**3p** **2p**
2.	$f(2)=2+m$ $2+m=0\Leftrightarrow m=-2$	**2p** **3p**
3.	$2x+1=5$ $x=2$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile În mulțimea A sunt 4 multipli de 2, deci sunt 4 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$x_M=2$ $y_M=3$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p** **2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{1}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 3=$ $=1-6=-5$	**3p** **2p**
b)	$C(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A+C(-1)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A+C(-1)\right)=-16$ $\det B=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16$, deci $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$	**3p** **2p**
c)	$C(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+2 & 3x+1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 10\\ 2x+2 & 5\end{pmatrix}$, $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**3p** **2p**
2.a)	$f(1)=1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1+3=$ $=1+2-6+3=0$	**3p** **2p**
b)	Câtul este $X-1$ Restul este 0	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6$, $x_1x_2x_3=-3$	**3p**
	$x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\left(x_1+x_2+x_3\right)+\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-2+\frac{-6}{-3}=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x}=$	**2p**
	$=-3$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
	$f(1)\le f(x)\le f(-1)$, deci $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^3 2x\,dx=x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2015\right)'=$	**2p**
	$=2x+\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2\left(f(x)-2x\right)^2dx=\pi\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\frac{\pi}{2}$	**2p**