# Examenul de bacalaureat național 2019
# Proba E. c)
## Matematică *M_mate-info*

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $a$, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2019^x+2019^{-x}=2$.

**5p** **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei $d$ care trece prin $A$ și este perpendiculară pe $AB$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=0$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$.

**5p** **c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde $m$ și $n$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale $m$ și $n$.

**5p** **b)** Determinaţi numerele reale $m$ și $n$, știind că polinomul $f$ este divizibil cu polinomul $X^2-1$.

**5p** **c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale $m$ și $n$, unde $x_1$, $x_2$ și $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.

**2.** Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=\frac{7}{3}$.

**5p** **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa $Ox$ și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu $e^2$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1}x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$ | **2p** |
| | $=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$ | **3p** |
| **2.** | $f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$ | **3p** |
| | $a=1$ | **2p** |
| **3.** | $2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$ | **3p** |
| | $2019^x=1$, deci $x=0$ | **2p** |
| **4.** | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile | **2p** |
| | Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile | **2p** |
| | $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$ | **1p** |
| **5.** | $m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$ | **2p** |
| | Ecuația dreptei $d$ este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$ | **3p** |
| **6.** | $\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 b\cdot\cos^2 a=$ | **2p** |
| | $=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\sin^2 b\left(1-\sin^2 a\right)=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a&0&-a\\0&2&0\\-a&0&a\end{vmatrix}=$ | **2p** |
| | $=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real $a$ | **3p** |
| **b)** | $A(a)A(b)=\begin{pmatrix}2ab&0&-2ab\\0&4&0\\-2ab&0&2ab\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=2\begin{pmatrix}ab&0&-ab\\0&2&0\\-ab&0&ab\end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **2p** |
| **c)** | $B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$ | **3p** |
| | $=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **2.a)** | $f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$ | **2p** |
| | $f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale $m$ și $n$ | **3p** |
| **b)** | $f$ este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ și $f(1)=0$ | **3p** |
| | $m=-1,\ n=-1$ | **2p** |
| **c)** | $x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$ | **3p** |
| | $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$ | **3p** |
| | $=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=x(2-x)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$ | **2p** |
| | $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci $f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci $f$ este crescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci $f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$ | **3p** |
| | Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f$ este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f$ este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ și pe $(2,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale | **2p** |
| **2.a)** | $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$ | **3p** |
| | $=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ | **2p** |
| **b)** | $g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^e \|g(x)\|\,dx=\int_1^e (2x+\ln x)\,dx=\left.x^2\right\|_1^e+\left.x\ln x\right\|_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$ | **3p** |
| | $=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$ | **2p** |
| **c)** | $\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$ | **3p** |
| | $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$ | **2p** |

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați termenul $b_3$ al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și rația $q = 5$.

**5p** **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x} + x = 4$.

**5p** **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din $A$ a triunghiului $ABC$.

**5p** **6.** Arătați că $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, pentru orice număr real $x$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(-1)) = 17$.

**5p** **b)** Demonstrați că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **c)** Determinați perechile de numere reale $x$ și $y$, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.

**2.** Pe mulţimea $G = (-2, 2)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

**5p** **b)** Determinaţi $x \in G$, pentru care $x * x = \dfrac{8}{5}$.

**5p** **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x+1)$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$.

**5p** **b)** Determinați ecuaţia tangentei la graficul funcţiei $f$ în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei $f$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x \in (0, \pi)$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx = 6$.

**5p** **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcției $f$ este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul natural nenul $n$, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = n$ are aria egală cu $4 - 6e^{-n}$.

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_şt-nat***
**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 6**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii***

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $b_3 = b_1 \cdot q^2 =$ | **3p** |
| | $= 1 \cdot 5^2 = 25$ | **2p** |
| **2.** | $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ | **2p** |
| | $x = 2$, $x = 3$ | **3p** |
| **3.** | $\sqrt{2x} = 4 - x \Rightarrow 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$ | **3p** |
| | $x = 2$, care convine, $x = 8$, care nu convine | **2p** |
| **4.** | Mulțimea $A$ are $49$ de elemente, deci sunt $49$ de cazuri posibile | **2p** |
| | În mulțimea $A$ sunt $7$ numere naturale, deci sunt $7$ cazuri favorabile | **2p** |
| | $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$ | **1p** |
| **5.** | Punctul $M(-3,3)$ este mijlocul laturii $BC$ | **2p** |
| | Ecuația medianei din $A$ este $y = 3$ | **3p** |
| **6.** | $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos x \sin x + 3\cos^2 x =$ | **2p** |
| | $= 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$, pentru orice număr real $x$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - (-4)\cdot 4 =$ | **3p** |
| | $= 1 + 16 = 17$ | **2p** |
| **b)** | $A(2019-a) + A(2019+a) = \begin{pmatrix} 2019-a & 4 \\ -4 & 2019-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019+a & 4 \\ -4 & 2019+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix} =$ | **3p** |
| | $= 2\begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix} = 2A(2019)$, pentru orice număr real $a$ | **2p** |
| **c)** | $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy-16 & 4x+4y \\ -4x-4y & xy-16 \end{pmatrix}$, $2A(-8) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $xy = 0$ și $x + y = 2$, deci $x = 0$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 0$ | **2p** |
| **2.a)** | $x * 0 = \frac{4x + 4\cdot 0}{4 + x\cdot 0} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$ | **2p** |
| | $0 * x = \frac{4\cdot 0 + 4\cdot x}{4 + 0\cdot x} = \frac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$, deci $0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$” | **3p** |
| **b)** | $\frac{8x}{4 + x^2} = \frac{8}{5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ | **3p** |
| | $x = 1$, care convine, $x = 4$, care nu convine | **2p** |

| | | |
|---|---|---|
| **c)** | $f(x)*f(y)=\dfrac{4f(x)+4f(y)}{4+f(x)f(y)}=\dfrac{4\cdot\dfrac{2(x-1)}{x+1}+4\cdot\dfrac{2(y-1)}{y+1}}{4+\dfrac{4(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=\dfrac{2(xy+x-y-1+xy-x+y-1)}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{4(xy-1)}{2(xy+1)}=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$ | **2p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=-2+\dfrac{2}{x+1}=$ | **3p** |
| | $=\dfrac{-2x-2+2}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$ | **2p** |
| **b)** | $f(0)=1$, $f'(0)=0$ | **2p** |
| | Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(0)\Rightarrow 1-2x+2\ln(x+1)\leq 1$, deci $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ | **3p** |
| | $\cos x>-1$, pentru orice $x\in(0,\pi)$, deci $\ln(1+\cos x)\leq\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$ | **2p** |
| **2.a)** | $\int_{-1}^{1}f(x)e^x\,dx=\int_{-1}^{1}(x+3)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$ | **3p** |
| | $=\left(\dfrac{1}{2}+3\right)-\left(\dfrac{1}{2}-3\right)=6$ | **2p** |
| **b)** | $F$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci funcția $F$ este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $\mathcal{A}=\int_0^n\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^n(x+3)e^{-x}dx=-(x+4)e^{-x}\Big\vert_0^n=-(n+4)e^{-n}+4$ | **3p** |
| | $-(n+4)e^{-n}+4=4-6e^{-n}$, de unde obținem $n=2$ | **2p** |

# Examenul de bacalaureat naţional 2019
## Proba E. c)
## Matematică *M_tehnologic*

**Varianta 6**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Arătaţi că $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=7$.

**5p** **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-6x+8$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficului funcţiei $f$ cu axa $Oy$.

**5p** **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+9\right)=2$.

**5p** **4.** După o ieftinire cu $40\%$, preţul unui obiect este $300$ de lei. Calculaţi preţul obiectului înainte de ieftinire.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A\left(3,2\right)$, $B\left(-3,2\right)$ şi $C\left(0,6\right)$. Determinaţi, în triunghiul $ABC$, lungimea medianei din vârful $C$.

**5p** **6**. Arătaţi că $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{4}$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $M\left(a\right)=I_2+aA$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

**5p** **b)** Demonstraţi că $M\left(a\right)\cdot M\left(b\right)=M\left(a+b+ab\right)$, pentru orice numere reale $a$ şi $b$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul real $a$ pentru care $M\left(1\right)+M\left(2\right)+\ldots+M\left(2019\right)=2019M\left(a\right)$.

**2.** Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2-mX-2$, unde $m$ este număr real nenul.

**5p** **a)** Arătaţi că $f\left(1\right)=0$, pentru orice număr real nenul $m$.

**5p** **b)** Pentru $m=3$, determinaţi rădăcinile polinomului $f$.

**5p** **c)** Determinaţi numărul real nenul $m$ pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-4$, unde $x_1$, $x_2$ şi $x_3$ sunt rădăcinile polinomului $f$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^3-3x+5$.

**5p** **a)** Arătaţi că $f'\left(x\right)=3\left(x-1\right)\left(x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Demonstraţi că funcţia $f$ este convexă pe $\left[0,+\infty\right)$.

**5p** **c)** Demonstraţi că $f\left(x\right)\le 7$, pentru orice $x\in\left(-\infty,1\right]$.

**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

**5p** **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f^2\left(x\right)dx=11$.

**5p** **b)** Calculaţi $\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{f\left(x\right)}dx$.

**5p** **c)** Demonstraţi că, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$, suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $f$, axa $Ox$ şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_tehnologic***
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 6**

***Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{7}=$ | **2p** |
| | $=7+0=7$ | **3p** |
| **2.** | $f(0)=8$ | **3p** |
| | Coordonatele punctului de intersecție cu axa $Oy$ sunt $x=0$ și $y=8$ | **2p** |
| **3.** | $x^2+9=5^2\Rightarrow x^2-16=0$ | **2p** |
| | $x=-4$ sau $x=4$, care convin | **3p** |
| **4.** | $x-\frac{40}{100}\cdot x=300$, unde $x$ este prețul obiectului înainte de ieftinire | **3p** |
| | $x=500$ de lei | **2p** |
| **5.** | $M(0,2)$, unde punctul $M$ este mijlocul laturii $AB$ | **2p** |
| | $CM=4$ | **3p** |
| **6.** | $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **2p** |
| | $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $\det A=\begin{vmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{vmatrix}=6\cdot(-5)-3\cdot(-10)=$ | **3p** |
| | $=-30+30=0$ | **2p** |
| **b)** | $A\cdot A=A$ și $M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=$ | **2p** |
| | $=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale $a$ și $b$ | **3p** |
| **c)** | $(I_2+A)+(I_2+2A)+\ldots+(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+\ldots+2019)A=$ | **3p** |
| | $=2019(I_2+1010A)=2019M(1010)$, de unde obținem $a=1010$ | **2p** |
| **2.a)** | $f(1)=m\cdot1^3+2\cdot1^2-m\cdot1-2=$ | **3p** |
| | $=m+2-m-2=0$, pentru orice număr real nenul $m$ | **2p** |
| **b)** | $f=3X^3+2X^2-3X-2\Rightarrow f=(X-1)(X+1)(3X+2)$ | **2p** |
| | $x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_3=1$ | **3p** |
| **c)** | $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1,\ x_1x_2x_3=\frac{2}{m}$ | **2p** |
| | $\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-4\Leftrightarrow\frac{-m}{2}=-4\Leftrightarrow m=8$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | $f'(x)=3x^2-3=$ | **3p** |
| | $=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| **b)** | $f''(x)=6x$, $x\in\mathbb{R}$ | **2p** |
| | $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția $f$ este convexă pe $[0,+\infty)$ | **3p** |
| **c)** | $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$ | **2p** |
| | $f(x)\leq f(-1)$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$ și $f(-1)=7$, deci $f(x)\leq 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$ | **3p** |
| **2.a)** | $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(3x^2+6x+7\right)dx=\left(\frac{3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+7x\right)\Big\|_0^1=$ | **3p** |
| | $=1+3+7-0=11$ | **2p** |
| **b)** | $\int_{-1}^1\frac{x+1}{f(x)}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+7}\Big\|_{-1}^1=$ | **3p** |
| | $=\frac{1}{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{4}\right)=\frac{2}{3}$ | **2p** |
| **c)** | $\sqrt{3x^2+6x+7}\geq\sqrt{7}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ | **2p** |
| | $\mathcal{A}=\int_0^a\left\|f(x)\right\|dx=\int_0^a\sqrt{3x^2+6x+7}\,dx\geq\int_0^a\sqrt{7}\,dx=a\sqrt{7}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$ | **3p** |

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_pedagogic***

**Varianta 6**

***Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice cu termeni pozitivi $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 2$ și $b_3 = 8$.

**5p** **2.** Determinați numărul real $m$, știind că punctul $A(m,2m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 6$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = 5$.

**5p** **4.** După o ieftinire cu $10\%$, urmată de o scumpire cu $10$ lei, prețul unui obiect este $190$ de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(4,4)$ și $B(6,0)$. Determinați, în triunghiul $AOB$, ecuația medianei din vârful $A$.

**5p** **6.** Arătați că $2\sin 30° - \sin 90° = 0$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(xy + x + y) + 1$.

**5p** **1.** Arătați că $(-1)\circ 1 = -1$.

**5p** **2.** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

**5p** **3.** Demonstrați că $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale $x$ și $y$.

**5p** **4.** Demonstrați că $e = -\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

**5p** **5.** Determinați numerele reale $x$ pentru care $(x-1)\circ(x+2) = -5$.

**5p** **6.** Determinați numerele naturale nenule $n$ pentru care $n \circ (n-1) \leq 11$.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

**5p** **1.** Arătați că $\det A = -2$.

**5p** **2.** Calculați $\det(A+B)$.

**5p** **3.** Arătați că $A \cdot A = B$.

**5p** **4.** Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care $aA + bB = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

**5p** **5.** Arătați că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X + A = B$, atunci matricea $X$ este inversabilă.

**5p** **6.** Determinați valorile reale ale lui $a$ pentru care $\det(A + B - aI_2) \leq 0$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Examenul de bacalaureat național 2019**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_pedagogic***

**BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE**

**Varianta 6**

***Filiera vocaţională, profilul pedagogic, specializarea învăţător-educatoare***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $b_2 = 4$ | **2p** |
| | $S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 4 + 8 = 14$ | **3p** |
| **2.** | $f(m) = 5m - 6$ | **2p** |
| | $5m - 6 = 2m \Leftrightarrow m = 2$ | **3p** |
| **3.** | $x^2 - 10x + 25 = 25 \Rightarrow x^2 - 10x = 0$ | **2p** |
| | $x = 0$ sau $x = 10$, care convin | **3p** |
| **4.** | $x - \frac{10}{100} \cdot x + 10 = 190$, unde $x$ este prețul inițial al obiectului | **3p** |
| | $x = 200$ de lei | **2p** |
| **5.** | Punctul $M(3,0)$ este mijlocul segmentului $OB$ | **2p** |
| | Ecuația medianei este $y = 4x - 12$ | **3p** |
| **6.** | $\sin 30° = \frac{1}{2}$ | **2p** |
| | $\sin 90° = 1 \Rightarrow 2\sin 30° - \sin 90° = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0$ | **3p** |

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $(-1) \circ 1 = 2 \cdot ((-1) \cdot 1 + (-1) + 1) + 1 =$ | **3p** |
| | $= 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ | **2p** |
| **2.** | $x \circ y = 2(xy + x + y) + 1 = 2(yx + y + x) + 1 =$ | **3p** |
| | $= y \circ x$, pentru orice numere reale $x$ și $y$, deci legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă | **2p** |
| **3.** | $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 2 - 1 =$ | **2p** |
| | $= 2x(y+1) + 2(y+1) - 1 = 2(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale $x$ și $y$ | **3p** |
| **4.** | $x \circ \left(-\frac{1}{2}\right) = 2(x+1)\left(-\frac{1}{2}+1\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$, pentru orice număr real $x$ | **2p** |
| | $\left(-\frac{1}{2}\right) \circ x = 2\left(-\frac{1}{2}+1\right)(x+1) - 1 = x + 1 - 1 = x$, pentru orice număr real $x$, deci $e = -\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$” | **3p** |
| **5.** | $2(x-1+1)(x+2+1) - 1 = -5 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$ | **3p** |
| | $x = -2$ sau $x = -1$ | **2p** |
| **6.** | $2(n+1)(n-1+1) - 1 \le 11 \Leftrightarrow n^2 + n - 6 \le 0$ | **2p** |
| | $n \in [-3, 2]$ și, cum $n$ este număr natural nenul, obținem $n = 1$ sau $n = 2$ | **3p** |

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-2\cdot 1=$ | **3p** |
| | $=0-2=-2$ | **2p** |
| **2.** | $A+B=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $\det\left(A+B\right)=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=0$ | **2p** |
| **3.** | $A\cdot A=\begin{pmatrix}1\cdot 1+1\cdot 2 & 1\cdot 1+1\cdot 0\\ 2\cdot 1+0\cdot 2 & 2\cdot 1+0\cdot 0\end{pmatrix}=$ | **3p** |
| | $=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=B$ | **2p** |
| **4.** | $aA+bB=\begin{pmatrix}a & a\\ 2a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3b & b\\ 2b & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+3b & a+b\\ 2a+2b & 2b\end{pmatrix}$ | **2p** |
| | $\begin{pmatrix}a+3b & a+b\\ 2a+2b & 2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & 2\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$ și $b=1$ | **3p** |
| **5.** | $X=B-A\Rightarrow X=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ | **3p** |
| | $\det X=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4\neq 0$, deci matricea $X$ este inversabilă | **2p** |
| **6.** | $A+B-aI_2=\begin{pmatrix}4-a & 2\\ 4 & 2-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+B-aI_2\right)=a^2-6a$ | **3p** |
| | $a^2-6a\leq 0\Leftrightarrow a\in\left[0,6\right]$ | **2p** |