

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ BACAU  
ETAPA LOCALĂ  
24 IANUARIE 2009

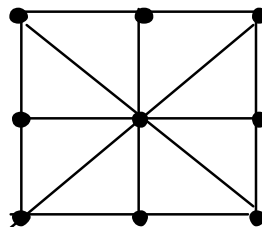
**CLASA A V-A**

1. a) Aflați numerele de două cifre care împărțite la 4 dau câtul de o cifră și restul trei.  
b) Fie șirul de numere naturale 3, 7, 11, 15, ...
  - i) Verificați dacă 1231 și 2009 sunt numere din șir.
  - ii) Determinați al 100-lea termen al șirului.
2. Diferența a două numere este 3. Aflați numerele știind că unul dintre ele este cu 11 mai mic decât triplul celuilalt.
3. Să se determine numerele a, b, c știind că  $5a + 3b = 57$ ,  $a \cdot c = 72$ , iar  $bc = 108$ .
4. Determinați numerele naturale a, b, c, d, e, f, g nenule, distincte, cele mai mici posibile, din pătratul alăturat, pentru a face un pătrat magic (suma numerelor pe linii, pe coloane și pe diagonale să fie aceeași). Nici un număr nu trebuie să se repete în pătrat. Justificați fiecare alegere.

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| a | 4  | 3 | b |
| 6 | 11 | c | 9 |
| d | 7  | 8 | e |
| 5 | f  | g | 2 |

**CLASA A VI-A**

1. Să se determine numerele naturale prime a, b, c cu proprietatea:  
 $287a + 82b + 14c = 2009$ .
2. Arătați că rezultatul calculului  $\frac{1,4 + 2,4 + 3,4 + \dots + n,4}{n} + \frac{1}{10} - \frac{n}{2}$  este număr natural, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .
3. Se consideră cele nouă puncte obținute prin intersecția dreptelor din figura de mai jos. Explicați cum putem desena, fără a ridica creionul de pe hârtie, o linie frântă formată din patru segmente care să conțină toate cele nouă puncte (punctele menționate nu sunt în mod obligatoriu capete ale segmentelor).



4. a) Desenați  $\sphericalangle AOB$  cu măsura de  $23^\circ$  și apoi  $\sphericalangle BOC$  cu măsura de cinci ori mai mare decât măsura  $\sphericalangle AOB$ .  
b) Pornind de la figura realizată la punctul a), desenați un unghi cu măsura de  $16^\circ 15'$ , folosind numai rigla neagrădată și compasul (precizați fiecare pas făcut în realizarea desenului).

**CLASA A VII-A**

1. Arătați că numărul  $\sqrt{A}$  este natural, unde  
$$A = \sqrt{1} + \sqrt{1+3+5} + \sqrt{1+3+5+7+9} + \dots + \sqrt{1+3+5+7+\dots+2009}.$$
Precizăm că sub fiecare radical este o sumă cu număr impar de termeni.
2. Să se verifice egalitatea:  
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{39} - \frac{1}{40} = \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \dots + \frac{1}{40}$$
3. Triunghiurile ABD, ABC și ACE nu au puncte interioare comune. Fie  $M \in (BA)$ ,  $N \in (CA)$  astfel încât  $MN \parallel BC$ . Construiți  $P \in (AD)$ ,  $Q \in (AE)$  astfel încât  $AP \cdot NC = PD \cdot AN$  și  $\frac{AQ}{AE} + \frac{MB}{AB} = 1$ . Stabiliți poziția dreptelor PQ și DE.
4. Fie pătratul ABCD. Considerăm punctele  $M \in (BD)$ ,  $N \in (CD)$  și  $P \in (AB)$ , astfel încât  $(DM) \equiv (DC)$ ,  $(BM) \equiv (DN)$  și  $(DB) \equiv (AP)$ . Dacă  $MN \cap AB = \{E\}$ , să se demonstreze că EPCN este paralelogram.

**CLASA A VIII-A**

1. Determinați numerele a și b, distincte, știind că  $[a, b] \cap Z = \{a, b\}$ , iar  $4b^2 + 9a^2 - 12b + 6a - 7 = 0$ .
2. a) Suma numerelor a, b, c  $\in R_+^*$  este 16. Arătați că:  
$$\sqrt{ab+ac} + \sqrt{ab+bc} + \sqrt{bc+ac} \leq 24.$$
b) Suma numerelor întregi a, b și c este pară. Dacă  $b^2 = (a+2)(c+2)$ , arătați că a, b și c sunt numere pare.
3. Pe un cerc C(O, 6cm) se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât măsurile arcelor AB, BC, CD și CDA să fie direct proporționale cu numerele 2, 4, 3, 6. În punctul A se ridică perpendiculara AE pe planul (ABC),  $AE = 2\sqrt{6}$  cm. Se cere:
  - a) Aria patrulaterului ABCD
  - b) Distanța de la punctul A la planul (BCE)
  - c) Măsura unghiului format de planele (ABC) și (CDE).
4. Fie ABCD un romb cu  $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$ . În punctul P  $\in (AC)$  se ridică perpendiculara MP pe planul (ABC). Proiecțiile punctului M pe laturile (AB), (BC), (CD) și (DA) sunt punctele E, F, G și respectiv H.
  - a) Demonstrați că EFGH este trapez isoscel
  - b) Dacă d este dreapta de intersecție a planelor (MEH) și (MFG), arătați că dreptele d și AC sunt necoplanare.