Concursul interjudeţean de matematică Ion Ciolac”

Ediţia a IV-a, Craiova, 22 mai 2004

Constantin P. Niculescu şi Liliana Niculescu

Această ediţie a Concursului Ion Ciolac” s-a bucurat de participarea a peste 400 de elevi din judeţele Argeş, Dolj, Gorj, Mehedinţi, Olt, Prahova şi Vâlcea. Premiul întâi a fost obţinut de următorii participanţi: Toader Alexandra (clasa a IV-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Schneider Valeriu (clasa a V-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Pădureanu Victor (clasa a VI-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Tuţescu Anca (clasa a VII-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova), Bucăţea Mădălin (clasa a VIII-a, Şc. gen. 37, Craiova), Duţă Cătălin (clasa a IX-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova), Dinu Lavinia (clasa a X-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova), Diaconu Andrei (clasa a XI-a, Colegiul Naţional Fraţii Buzeşti, Craiova) şi Ion Marius (clasa a XII-a, Colegiul Naţional Carol I, Craiova). Indicăm în continuare problemele propuse.

Clasa a IV-a

1. Un elev a cumpărat 16 caiete şi 12 creioane pentru care a plătit 312 lei. Un alt elev a cumpărat 24 de caiete şi 18 creioane de acelaşi fel cu colegul său.

   Ce sumă a încasat librăria de la cei doi copii?

   Maria Doran

2. Aflaţi cifrele a, b, c, d din egalităţile:

   (a) $(a-1)\times(a-2)=20$.

   (b) $\overline{bb}\times b+295=999$.

   (c) $c\times 4=9\times d-27$.

   Catargena Rada

3. (a) Aflaţi numărul natural a ştiind că dacă se împarte 25 la $3\times a-7$ se obţine restul 3.

   (b) Completaţi dreptunghiurile de mai jos cu numere aşa încât suma numerelor scrise în oricare trei dreptunghiuri alăturate să fie aceeaşi.

185		275					219

***

Clasa a V-a

1. Fie $A\subset\mathbb{N}$, o mulţime având simultan proprietăţile:

(a) $1 \in A$.

(b) Dacă $x \in A$, atunci $4x \in A$.

(c) Dacă $3x+1 \in A$, atunci $x \in A$.

Demonstraţi că $\{0; 85; 113; 1024\} \subset A$.

Ion Rotaru

2. Demonstraţi că oricare ar fi numerele naturale $\overline{aaaa}$ şi $\overline{bbbb}$ scrise în baza 10, are loc inegalitatea

$$\frac{(\overline{aa})^2 + a \cdot \overline{aaa}}{4 \cdot \overline{aaaa}} < \frac{\overline{bbbb}}{\left(\overline{bb}\right)^2 + b \cdot \overline{bbb}}.$$

Dan Mic

3. Aflaţi cel mai mare număr natural par n astfel încât în mulţimea $\{1, 2, 3, ..., n\}$ să existe 668 de numere care se divid cu 2 dar nu se divid cu 6.

Liliana Niculescu

Clasa a VI-a

1. Fie numerele $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a+b$, $b+c$ şi $c+a$ sunt direct proporţionale cu numerele bc, ca şi ab. Demonstraţi că $a=b=c$.

Nicolae Tălău

2. Aflaţi cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care putem alege semnele $+$ şi $-$ astfel încât

$$\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm n = 16.$$

R.M.T., Dan Comănescu

3. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $m\left(\widehat{ADC}\right) = 120°$, $m\left(\widehat{DBC}\right) = 50°$ şi $m\left(\widehat{DAB}\right) = 40°$. Demonstraţi că dacă $(DB$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ADC}$, atunci $(AC$ este bisectoarea unghiului $\widehat{DAB}$.

Nicolae Tălău

Clasa a VII-a

1. Rezolvaţi ecuaţia:

$$\frac{x+4}{5} + \frac{x+5}{6} + ... + \frac{x+98}{99} + \frac{x+99}{100} = 2^5 \cdot 3.$$

Cornelia Piciu

2. Fie ABC un triunghi ascuţitunghic. Notăm cu D, simetricul lui A faţă de B şi cu E simetricul lui A faţă de C.

   (a) Determinaţi punctul $M \in BC$ pentru care suma $DM + EM$ este minimă.

   (b) După acelaşi procedeu se construiesc punctele $N \in AC$ şi $P \in AB$. Demonstraţi că dreptele AM, BN şi CP sunt concurente.

Ion Rotaru şi Liliana Niculescu

3. În divizia A a campionatului naţional de fotbal sunt 16 echipe. Fiecare echipă joacă cu toate celelalte câte două meciuri, unul acasă şi unul în deplasare. Se acordă 3 puncte pentru victorie, un punct pentru meci egal şi nu se acordă nici un punct pentru înfrângere.

   Care poate fi diferenţa maximă de puncte dintre ocupantele locurilor întâi şi doi la sfârşitul campionatului?

Monica Stanca

Clasa a VIII-a

1. Fie A o mulţime de numere naturale şi $f : A \to A$ o funcţie cu proprietăţile:

   i) există $x_0 \in A$ astfel încât $f(x_0) \neq x_0$;

   ii) $f(m) - f(n) = m - n$ pentru orice $m, n \in A$.

   Demonstraţi că mulţimea A este infinită.

Gazeta Matematică, Mircea Becheanu

2. Considerăm ecuaţiile:

$$\begin{aligned} 1+2+3+...x+y^2 &= z^2, \qquad \textbf{(1)} \\ 1+2+3+...x+y^3 &= z^2. \qquad \textbf{(2)} \end{aligned}$$

   Demonstraţi că:

   (a) ecuaţia **(1)** are o infinitate de soluţii (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$;

   (b) ecuaţia **(2)** are o infinitate de soluţii (x, y, z) cu $x, y, z \in \mathbb{N}^*$.

Claudiu Coandă

3. Considerăm piramida patrulateră regulată $SABCD$ iar E şi F, mijloacele muchiilor $[SA]$ şi $[SC]$. Fie $N \in [SB]$ astfel încât $SN = \frac{2}{3}SB$. Planul (ENF) intersectează SD în M iar planul α dus prin AC paralel cu (ENF) intersectează SD în Q. Calculaţi:

   (a) raportul dintre volumul lui $SMEF$ şi volumul lui $SACD$;

(b) raportul $\dfrac{SQ}{SD}$.

Claudiu Coandă

Clasa a IX-a

1. Fie ABC, un triunghi care nu este echilateral. Notăm cu A_1, simetricul lui A faţă de B, cu B_1, simetricul lui B faţă de C şi cu C_1, simetricul lui C faţă de A. Fie O şi O_1 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC şi $A_1B_1C_1$ iar H şi H_1, ortocentrele acestor triunghiuri. Demonstraţi că OO_1HH_1 este trapez.

***

2. Demonstraţi că nu există funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să îndeplinească simultan următoarele condiţii:

i) $f(f(x)+y) = x + g(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;

ii) există $\alpha \neq \beta \in \mathbb{R}$, şi $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ pentru care

$$\left(1 + g^2(\alpha) + g^2(\beta)\right)^n = 1 + ng^2(\alpha) + ng^2(\beta).$$

Raluca Ciurcea

3. Demonstraţi că dacă $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2^{n+2}}\right)$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2^k x < \frac{(2^n - 1)\pi}{n \cdot 2^{n+1}} \left(\frac{1}{x} - \mathrm{ctg} 2^n x\right).$$

Iuliana Coravu

Clasa a X-a

1. Mulţimea numerelor naturale nenule se descompune în 2004 progresii aritmetice neconstante care nu au termeni comuni. Demonstraţi că în fiecare dintre aceste progresii, raţia este mai mare sau egală cu primul termen al progresiei.

***

2. Considerăm mulţimea $A = \{1, 2, ..., n\}$, $n \geq 2$ şi funcţia $f : A \to A$ cu proprietatea $f(f(x)) = 1$ pentru orice $x \in A$.

(a) Demonstraţi că $f(A)$ are cel mult $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ elemente.

(b) Pentru $n = 4$, aflaţi numărul funcţiilor cu proprietatea din enunţ.

(c) Pentru $n = 2004$, aflaţi funcţia cu proprietatea dim enunţ pentru care produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot ... \cdot f(2004)$ este maxim.

Liliana Niculescu

3. Fie tetraedrul $OABC$, cu proprietatea $OA \perp OB$, $OB \perp OC$ şi $OC \perp OA$. Arătaţi că dacă

$$OA^2 + CB^2 = 4\left(\mathcal{A}_{\triangle OAB} + \mathcal{A}_{\triangle OAC} - \mathcal{A}_{\triangle OBC}\right)$$

atunci $m\left(\widehat{BAO}\right) + m\left(\widehat{CAO}\right) + m\left(\widehat{BAC}\right) = 90^\circ$.

Nicolae Tălău

Clasa a XI-a

1. Considerăm funcţiile $f, g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietăţile:

   i) funcţia f este crescătoare;

   ii) funcţia g este continuă;

   iii) funcţia $\dfrac{f}{g}$ este descrescătoare.

   Demonstraţi că funcţia f este continuă.

Dorin Popovici

2. Fie matricele $X, Y, Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât Z comută cu X sau cu Y. Demonstraţi că

$$\det(Z + XY) = \det(Z + YX).$$

G.M., Ovidiu Pop

3. O secantă mobilă dusă prin focarul F al parabolei $y^2 = 2px$ intersectează parabola în M şi N. Notăm cu M', N' şi E, proiecţiile punctelor M, N şi F pe directoarea parabolei. Demonstraţi că:

   (a) $EM' \cdot EN' = constant$.

   (b) MN' trece printr-un punct fix.

   (c) $\dfrac{1}{MF} + \dfrac{1}{NF} = constant$.

Liliana Niculescu

Clasa a XII-a

1. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel şi a, un element al lui A pentru care există $b \in A$ astfel încât $ab = 1$. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

   (a) $card\{x \in A \mid ax = 1\} > 1$;

(b) a nu este inversabil;

(c) există $c \in A$, $c \neq 0$ astfel încât $ac = 0$.

***

2. Determinaţi funcţiile continue $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ cu proprietatea

$$\int_a^b f(x)\, dx = \ln\left(\frac{b^b}{a^a} \cdot e^{a-b}\right)$$

pentru orice $a, b \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.

Virgiliu Schneider

3. Demonstraţi că dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă, neconstantă şi periodică, iar $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o primitivă a sa, atunci graficul lui F nu admite asimptote.

Liliana Niculescu

Soluţiile acestor probleme vor apare în revista de matematică *Ţiţeica*, editată de Colegiul Naţional Carol I" din Craiova.

Constantin P. Niculescu
Universitatea din Craiova
Str. A. I. Cuza 13
Craiova 200585

Liliana Niculescu
Colegiul Naţional „Carol I"
Str. Ion Maiorescu 6
Craiova