

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011**

**CLASA a V-a**

1. Fie numerele:  $m = 31 + 34 + 37 + 40 + \dots + 97 + 100$  și  $n = 38 + 41 + 44 + 47 + \dots + 95 + 98$ .
  - a) Calculați  $2 \cdot m - 2 \cdot n + 20$ .
  - b) Aflați restul împărțirii numărului  $p = 30 \cdot m - 2 \cdot n + 21$  la 7.
  
2. Se consideră numărul:  $a = 2^{6n+2} + 4^{3n+2} + 8^{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
  - a) Aflați cea mai mică valoare a lui  $p \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $p \cdot a$  este pătrat perfect, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
  - b) Aflați cea mai mică valoare a lui  $p \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât  $p \cdot a$  este cub perfect, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
  
3. Se dă produsul:  $P = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2010 \cdot 2011$ .
  - a) Determinați în câte cifre de 0 se termină produsul  $P$ .
  - b) Eliminând din produs toți multiplii de 2 și de 5, aflați ultima cifră a numărului rămas.
  
4. Suma a patru numere este 999. O treime din al treilea este egală cu o pătrime din al patrulea. Primul număr împărțit la al treilea dă câtul și restul 3, iar al doilea împărțit la al patrulea dă câtul și restul 4. Aflați cele patru numere.

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011**

**CLASA a VI-a**

1. Determinați tripletele de numere prime  $(x, y, z)$  pentru care  $x^2y = 216 - xz$ .
  
2. Dacă  $\overline{abc}$  este divizibil cu 37, atunci fracția  $\frac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2 \cdot \overline{bca} + 3 \cdot \overline{cab}}$  este reductibilă.
  
3. Se consideră unghiurile drepte  $\widehat{AOB}$  și  $\widehat{COD}$ , astfel încât  $C \in \text{Int}(\widehat{AOB})$ ,  $B \in \text{Int}(\widehat{COD})$  și unghiul  $\widehat{AOE}$  alungit.
  - a) Demonstrați că unghiul format de bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AOC}$  și  $\widehat{BOD}$  este unghi drept.
  - b) Dacă  $3 \cdot m(\widehat{AOC}) = 5 \cdot m(\widehat{DOE})$ , aflați măsurile unghiurilor  $\widehat{COB}$  și  $\widehat{BOD}$ .
  
4. Se dă triunghiul isoscel  $ABC$ ,  $AB=AC$ .  $M$  și  $N$  sunt mijloacele laturilor  $AB$ , respectiv  $AC$ . Pe prelungirea lui  $BN$  se ia punctul  $Q$ , astfel încât  $NQ=2 \cdot BN$ ,  $N \in (BQ)$ , iar pe prelungirea lui  $CM$  se ia punctul  $P$ , astfel încât  $MP=2 \cdot CM$ ,  $M \in (CP)$ . Dacă  $\{D\}=PB \cap QC$ , demonstrați că  $AD$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{BAC}$ .

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011**

**CLASA a VII-a**

1. a) Dați două exemple de numere naturale pătrate perfecte care se termină cu 2025.  
b) Demonstrați că există o infinitate de numere naturale pătrate perfecte care se termină cu 2025.
  
2. a) Dați o soluție a ecuației  $x^2 + y^2 = 1010$  în mulțimea numerelor întregi.  
b) Arătați că ecuația  $x^2 + y^2 = 1000 + 10z^2$  are o infinitate de soluții în mulțimea numerelor întregi.
  
3. În rombul ABCD,  $m(\hat{A})=60^\circ$ . Dacă M este mijlocul laturii AB,  $CM \cap BD = \{N\}$ , iar  $ND = 3$  cm, aflați:
  - a) Perimetrul rombului.
  - b) Raportul dintre aria triunghiului BMN și aria rombului.
  
4. a) Demonstrați că punctele de intersecție ale bisectoarelor unghiurilor unui dreptunghi sunt vârfurile unui pătrat.  
b) Prin vârful C al pătratului ABCD se construiește o dreaptă care intersectează semidreptele (AB și (AD în M, respectiv N. Demonstrați că  $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \text{constant}$ .

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ 12.02.2011**

**CLASA a VIII-a**

1. Dacă  $a$  și  $b$  sunt numere reale, astfel încât  $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4$ , aflați valoarea sumelor:  
 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 6$  și  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 6$ .
2. a) Determinați elementele mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 11x \text{ este număr natural pătrat perfect}\}$ .  
b) Arătați că pentru orice  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$ , există  $x \in \mathbb{Z}$ , astfel încât numărul  $x^2 - (2n + 1)x$  este pătrat perfect nenul.
3. În cubul  $ABCD A' B' C' D'$ ,  $O$  este centrul feței  $CDD' C'$  și  $M$  este mijlocul muchiei  $B' C'$ . Aflați:  
a) Măsura unghiului dintre  $BO$  și  $AD'$ .  
b) Măsura unghiului  $AOM$ .
4. Fie prisma patrulateră regulată  $ABCD A' B' C' D'$  cu latura bazei  $AB = 6$  cm și înălțimea  $AA' = 12$  cm. Dacă  $M \in (AA')$ ,  $AM = 2$  cm,  $N \in (BB')$ ,  $BN = 4$  cm și  $P \in (CC')$ ,  $CP = 6$  cm, determinați:  
a) Distanța de la punctul  $A'$  la dreapta de intersecție a planelor  $(MNP)$  și  $(ABCD)$ .  
b) Distanța de la punctul  $C'$  la planul  $(MNP)$ .

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a V-a**

**BAREM DE CORECTARE**

**Subiect 1**

- a)  $m - n = 31 + 34 + 37 + (40 - 38) + (43 - 41) + \dots + (97 - 95) + (100 - 98) =$   
 $= 102 + \underbrace{2 + 2 + 2 + \dots + 2}_{21 \text{ termeni}} = 102 + 42 = 144. \dots\dots\dots \underline{3 \text{ puncte}}$
- (sau calculul lui m: 1punct, calculul lui n: 1punct, calcul m-n: 1punct)
- $2 \cdot m - 2 \cdot n + 20 = 288 + 20 = 308. \dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- b)  $30 \cdot m - 2 \cdot n + 21 = 28 \cdot m + 2 \cdot m - 2 \cdot n + 20 + 1 = 28 \cdot m + 308 + 1 = \mathcal{M}_7 + 1. \dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Restul împărțirii este 1.  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$

**Subiect 2**

- $a = 2^{6n+2} + 4^{3n+2} + 8^{2n+1} = 2^{6n+2} + 2^{6n+4} + 2^{6n+3} = 2^{6n+2} (1 + 4 + 2) = 2^{6n+2} \cdot 7 \dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- a) Cel mai mic număr p, astfel încât p · a să fie pătrat perfect este p = 7, având  $p \cdot a = 2^{6n+2} \cdot 7 \cdot 7 = (2^{3n+1} \cdot 7)^2$ , pătrat perfect.  $\dots\dots\dots \underline{3 \text{ puncte}}$
- b) Cel mai mic număr p, astfel încât p · a să fie cub perfect este p = 2 · 7<sup>2</sup> = 98, având  $p \cdot a = 2^{6n+3} \cdot 7^3 = (2^{2n+1} \cdot 7)^3$ , cub perfect.  $\dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$

**Subiect 3**

- a) În produs sunt:  
 402 numere divizibile cu 5:  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 80 numere divizibile cu 25,  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 15 numere divizibile cu 125, și 3 numere divizibile cu 625.  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 În total sunt  $402 + 80 + 16 + 3 = 501$  factori de 5, cum numărul factorilor de 2 este mai mare, rezultă că numărul P se termină în 501 cifre de 0.  $\dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$
- b) La fiecare grupă de câte 20 de numere, după eliminarea multiplilor de 2 și de 5, ultima cifră este 1, deci până la 2000 ultima cifră a produsului numerelor rămase este 1.  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Ultima cifră a produsului numerelor rămase în P este dat de  $u(2001 \cdot 2003 \cdot 2007 \cdot 2009 \cdot 2011) = 9. \dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$

**Subiect 4 .**

- Cele patru numere se pot reprezenta: III: 3x, IV: 4x, I: 3 · 3x + 3 = 9x + 3 și II: 4 · 4x + 4 = 16x + 4.  $\dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 Se obține ecuația:  $9x + 3 + 16x + 4 + 3x + 4x = 999. \dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 De unde x = 31.  $\dots\dots\dots \underline{1 \text{ punct}}$   
 Numerele sunt: 282, 500, 93, 124.  $\dots\dots\dots \underline{2 \text{ puncte}}$   
 Obs. Problema se rezolvă și prin metoda grafică.

BAREM DE CORECTARE

**Subiect 1.**

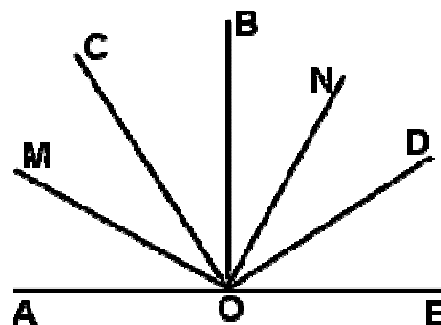
- $x^2y = 216 - xz \Leftrightarrow x^2y + xz = 216 \Leftrightarrow x(xy + z) = 216$ ..... 1punct  
 Cum  $x \mid 216$  și  $x$  prim, rezultă  $x \in \{2, 3\}$ ..... 2 puncte  
 Dacă  $x = 2$  se obține  $2y + z = 108$ . Dar  $2y$  și  $108$  sunt pare, rezultă  $z$  este par, fiind și prim, rezultă  $z = 2$  și apoi se obține  $y = 53$ ..... 2 puncte  
 Dacă  $x = 3$  se obține  $3y + z = 72$ . Dar  $3y$  și  $72$  sunt divizibile cu 3, rezultă  $z$  este divizibil cu 3, fiind și prim, rezultă  $z = 3$  și apoi se obține  $y = 23$ ..... 2 puncte  
 Tripletele sunt:  $(2, 53, 2)$  și  $(3, 23, 3)$ .

**Subiect 2**

- Dacă  $A = \overline{bca} + \overline{cab}$ , atunci  $\overline{abc} + A = 111(a + b + c) = \mathcal{M}_{37}$ , cum  $\overline{abc} : 37$ , rezultă  $A : 37$ ..... 2 puncte  
 Dacă  $B = 2 \cdot \overline{bca} + 3 \cdot \overline{cab}$ , atunci  $13 \cdot \overline{abc} + B = 1300a + 130b + 13c + 200b + 20c + 2a + 300c + 30a + 3b = 1332a + 333b + 333c = 37(36a + 9b + 9c) = \mathcal{M}_{37}$ , cum  $\overline{abc} : 37$ , rezultă  $B : 37$ . ..... 4 puncte  
 În concluzie fracția este reductibilă..... 1punct

**Subiect 3**

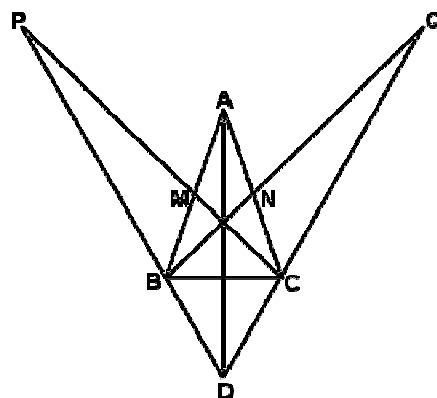
- a)  $m(\sphericalangle MON) = m(\sphericalangle COM) + m(\sphericalangle COB) + m(\sphericalangle BON) =$   
 $\frac{m(\widehat{AOC})}{2} + m(\widehat{COB}) + \frac{m(\widehat{BOD})}{2} = \frac{m(\widehat{AOC}) + 2 \cdot m(\widehat{COB}) + m(\widehat{BOD})}{2} =$   
 $\frac{m(\widehat{AOC}) + m(\widehat{COB}) + m(\widehat{COB}) + m(\widehat{BOD})}{2} = \frac{90^\circ + 90^\circ}{2} = 90^\circ$ .  
 ..... 3 puncte



- b) Dacă notăm  $m(\sphericalangle DOE) = 3x$ ,  $m(\sphericalangle AOC) = 5x$ , se obține ecuația:  $8x = 90^\circ$ , de unde  $x = 11^\circ 15'$ . ..... 2 puncte  
 Și atunci  $m(\sphericalangle DOE) = m(\sphericalangle COB) = 33^\circ 45'$  și  $m(\sphericalangle BOD) = m(\sphericalangle AOC) = 56^\circ 15'$ . ..... 2 puncte

**Subiect 4**

- 1)  $\Delta ABN \cong \Delta ACM$  (LUL), rezultă  $BN = CM$ ..... 2 puncte  
 2)  $\Delta PBM \cong \Delta QCN$  (LUL). ..... 2 puncte  
 3)  $\Delta DPC \cong \Delta DQB$  (ULU), rezultă  $DB = DC$ ..... 2 puncte  
 4)  $\Delta DAB \cong \Delta DAC$  (LLL), rezultă  $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DAC$  și deci [AD este bisectoarea unghiului BAC. .... 1 punct  
**Variantă:** 3')  $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle ACB$  ( $AB = AC$ ). (1 punct) Din 2 și 3'), rezultă  $\sphericalangle DBC \cong \sphericalangle DCB$ , de unde  $DB = DC$ . (1 punct) Apoi 4)  $\Delta DAB \cong \Delta DAC$  (LLL), rezultă  $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle DAC$  și deci [AD este bisectoarea unghiului BAC. .... (1 punct)



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VII-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

**Subiect 1**

- a)  $2025 = 45^2$ ,  $1092025 = 1045^2$ ..... **2 puncte**  
 b)  $\overline{n045}^2 = (1000n + 45)^2 = 10^6 n^2 + 90000n + 45^2 = \overline{a0000} + 2025 = \overline{a2025}$ , pătrat perfect care se termină cu 2025, unde n este orice număr natural nenul..... **5 puncte**

**Subiect 2**

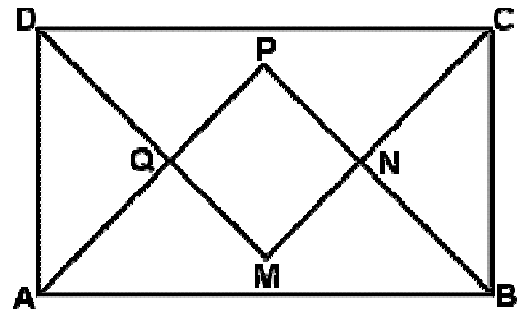
- a) Problema revine la a scrie 1010 ca sumă de două pătrate. Exemple de soluții ce se pot da: (29, 13), (31, 7), (-29, 13), ..... **2 puncte**  
 b)  $x^2 + y^2 = 10(100 + z^2) = (9 + 1)(100 + z^2) = (3z + 10)^2 + (z - 30)^2$  (o variantă)..... **3 puncte**  
 Și atunci dacă luăm  $x = 3z + 10$ ,  $y = z - 30$ , arată că orice triplet de forma  $(3z + 10, z - 30, z)$ , unde  $z \in \mathbb{Z}$ , este soluție a ecuației date..... **2 puncte**

**Subiect 3**

- a) N este centrul de greutate în  $\Delta ABC$ , de unde  $ND = 2 \cdot NB$  și atunci  $BD = 4,5$  cm,..... **2 puncte**  
 dar rombul având  $m(\hat{A}) = 60^\circ$ , rezultă perimetrul este de  $4,5 \text{ cm} \cdot 4 = 18$  cm. .... **2 puncte**  
 b) Dacă se notează cu S = aria triunghiului BMN, atunci  $A_{BCN} = 2S$ ,  $A_{BCM} = 2S$ , apoi  $A_{ABC} = 6S$  și  $A_{ABCD} = 12S$ , rezultă că raportul dintre aria triunghiului BMN și aria rombului este  $1/12$ ..... **3 puncte**

**Subiect 4**

- a)  $\Delta ABP$ ,  $\Delta DCM$ ,  $\Delta BCN$ ,  $\Delta ADQ$  sunt dreptunghice isoscele, rezultă patrulaterul MNPQ are unghiurile drepte, deci este dreptunghi..... **2 puncte**  
 Apoi  $PA = PB$  și  $AQ = BN$  ( $\Delta BCN \cong \Delta ADQ$ ), rezultă  $PN = PQ$  și atunci MNPQ este pătrat..... **2 puncte**



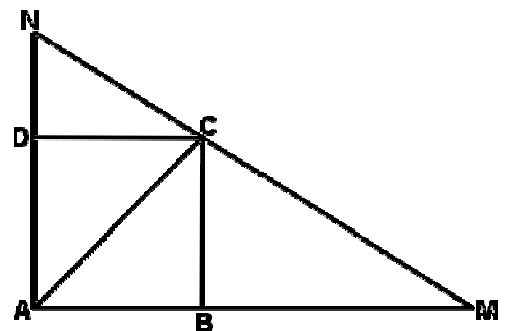
- b)  $A_{ACM} + A_{ACN} = A_{AMN}$  ..... **1 punct**,  
 rezultă  $AM \cdot BC + AN \cdot DC = AM \cdot AN$ , de unde .

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant} \dots\dots\dots \mathbf{2 \text{ puncte}}$$

**Obs.** Se poate da soluția bazată pe teorema fundamentală a asemănării care se aplică și în cazul general când ABCD este romb.

DC || AM, rezultă  $\Delta NDC \sim \Delta NAM$ , de unde  $\frac{DC}{AM} = \frac{NC}{MN}$ .

BC || AN, rezultă  $\Delta MBC \sim \Delta MAN$ , de unde  $\frac{BC}{AN} = \frac{MC}{MN}$ .



Prin adunarea celor două relații, membru cu membru se obține  $\frac{DC}{AM} + \frac{BC}{AN} = \frac{NC + MC}{MN} = 1$ . DC=BC, rezultă

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{BC} = \text{constant} .$$

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ 2011 CLASA a VIII-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

**Subiectul 1**

$(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 16$  ..... **2 puncte**

rezultă  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 = 16$ . Și atunci  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 6 = 20$  ..... **2 puncte**

Apoi  $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 6 = \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + 4 = 196 + 4 = 200$ . ..... **3 puncte**

Obs. Calculul se poate obține dacă se deduce din condiția dată că  $a = 2 + \sqrt{3}$  și  $b = 2 - \sqrt{3}$ , sau invers.

**Subiectul 2**

a)  $x^2 - 11x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 44x + 121 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow (2x - 11)^2 - 4k^2 = 121 \Leftrightarrow (2x - 11 - 2k)(2x - 11 + 2k) = 121$ . ..... **1 punct**

Scriind toate sistemele care se formează se obține  $A = \{-25, 0, 11, 36\}$ . ..... **2 puncte**

b)  $x^2 - (2n + 1)x = k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x = 4k^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 4(2n + 1)x + (2n + 1)^2 - 4k^2 = (2n + 1)^2 \Leftrightarrow (2x - 2n - 1 - 2k)(2x - 2n - 1 + 2k) = (2n + 1)^2$ . ..... **2 puncte**

O soluție pătrat perfect nenul se obține luând  $2x - 2n - 1 - 2k = 1$  și  $2x - 2n - 1 + 2k = (2n + 1)^2$ . Care dă  $x = (n + 1)^2$ . Sau pentru valorile negative dă  $x = -n^2$ . Pentru  $x = (n + 1)^2$  înlocuind dă  $(n + 1)^4 - (2n + 1)(n + 1)^2 = (n + 1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 1) = n^2(n + 1)^2$ , pătrat perfect nenul. .... **2 puncte**

**Subiectul 3**

a)  $BC' \parallel AD'$ , rezultă  $m(\widehat{BO, AD'}) = m(\widehat{BO, BC'}) = 30^\circ$ , deoarece BO este mediană în triunghiul echilateral BDC'. ..... **2 puncte**

b) Dacă notăm latura cubului cu a, atunci  $AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = \sqrt{a^2 + \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  ..... **1 punct**

$AM = \sqrt{B'A^2 + B'M^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$ .  $OM = \frac{B'D}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  ..... **2 puncte**

Se obține ca  $AM^2 = AO^2 + OM^2$ , rezultă  $m(\sphericalangle AOM) = 90^\circ$ . ..... **2 puncte**

**Subiectul 4:**

a)  $MN = \sqrt{6^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ ,  $NP = \sqrt{6^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$  ... **1 punct**

Dacă  $\{Q\} = (MNP) \cap DD'$ , atunci patrulaterul MNPQ este romb și  $QN \parallel BD$ . Rezultă că dreapta de intersecție a planelor date este o dreaptă d paralelă cu BD ce conține punctul E, unde  $\{E\} = MP \cap AC$ . ..... **1 punct**

Cum  $BD \perp AC$ , atunci  $AC \perp d$ . Din teorema celor trei perpendiculare se obține că distanța este A'E.  $AM \parallel CP$ , rezultă  $\triangle EAM \sim \triangle ECP$  și se obține  $AE = 3\sqrt{2}$ , iar din  $\triangle A'AE$ ,  $A'E = 9\sqrt{2}$  ..... **2 puncte**

b) Distanța reprezintă lungimea înălțimii din C' pe MP ..... **1 punct**

Avem  $MP \cdot d(C', (MNP)) = C'P \cdot AC$ ;  $2\sqrt{22} \cdot d(C', (MNP)) = 6 \cdot 6\sqrt{2}$ , rezultă  $d(C', (MNP)) = \frac{18\sqrt{11}}{11}$  ..... **2 puncte**

Sau:  $A_{AMN} \cdot d(C', (MNP)) = A_{C'NP} \cdot d(M, (C'NP))$ .

