CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICĂ EUCLID

16 . 01 . 2010

Clasa a VI –a

SOLUȚII

SUBIECTUL I **1)** **b)** **2)** **b)** **3)** **d)** **4)** **b)** **5)** **a)**

SUBIECTUL II **1)** 3 **2)** 2 *cm* **3)** $\frac{7}{10}$ **4)** 1 **5)** 2 **6)** 29 **7)** 7 **8)** 11 **9)** 30° **10)** 3

SUBIECTUL III

a) $\frac{3}{1};\frac{2}{2};\frac{1}{3}$

b) 7 = 6 + 1 = 5 + 2 = 4 + 3 = 3 + 4 = 2 + 5 =1 + 6. Deci în grupa 7 sunt 6 numere.

c) $\frac{5}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{5}=1$

d) Grupa 2010 conține fracțiile $\frac{2009}{1};\frac{2008}{2};\frac{2007}{3};\ldots;\frac{1007}{1003};\frac{1006}{1004}$ etc. Până la $\frac{1006}{1004}$, toate numerele din grupă sunt supraunitare, deci grupa conține 1004 numere supraunitare.

e) Numărul grupei este dat de suma dintre numărător şi numitor, deci $\frac{1009}{1001}$ face parte din grupa 2010.

f) $\frac{1009}{1001}$ este a 1001-a fracție din grupa 2010. Observăm că grupa *k* are *k*-1 numere (fracții cu numere de la 1 la *k*-1). Deci avem $1+2+3+\ldots+2008+1000$ termeni înaintea lui $\frac{1009}{1001}$**.** Notăm

$N=1+2+\ldots+2008=(1+2008)+(2+2007)+\ldots+(1004+1005)=$

$=2009\cdot1004=2017036$**.** Prin urmare $\frac{1009}{1001}$ este al 2018037 – lea termen.

g) $\frac{1009}{1001}=\frac{1009\cdot2}{1001\cdot2}=\frac{1009\cdot3}{1001\cdot3}=\ldots=\frac{1009\cdot2010}{1001\cdot2010}$. Am găsit astfel 2010 termeni ai şirului, făcând parte din grupe diferite, care au toți valoarea $\frac{1009}{1001}$**.**

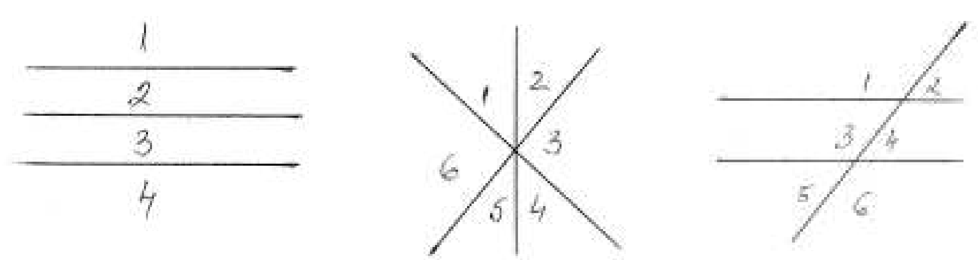
SUBIECTUL IV

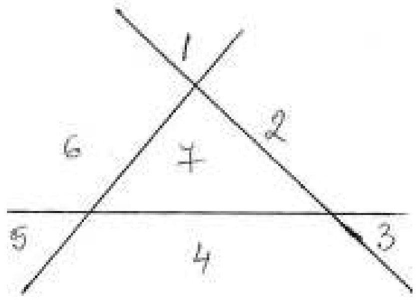
a) O dreaptă împarte planul în două regiuni.

b) Două drepte paralele împart planul în 3 regiuni.

c) Două drepte concurente împart planul în 4 regiuni.

d) Cele 3 drepte se pot afla într-una din următoarele situații: paralele, concurente, concurente 2 câte 2, două paralele şi una secantă. Analizând pe figură numărul de regiuni, tragem concluzia că numărul maxim este 7.





e)
Trei drepte concurente 2 câte 2 care nu trec toate prin acelasi punct împart planul în 7 regiuni.
f) Notăm cu R_n numărul maxim de regiuni în care împart *n* drepte planul. Este evident că $R_1 = 2$ şi $R_2 = 4$. Dacă ducem o nouă dreaptă, a n+1 - a, atunci aceasta va intersecta unele regiuni, iar pe altele nu. Numărul de regiuni noi adăugate va fi numărul de regiuni străbătute. Fiecare regiune străbătută lasă pe dreapta noastră urma unui segment sau a unei semidrepte. Acestea sunt determinate de punctele de intersecție dintre celelelate drepte şi dreapta *n*+1. Cele *n* drepte o intersectează în maxim *n* puncte, iar cele *n* puncte determină pe dreapta *n*-1 segmente si 2 semidrepte, deci apare *n*+1 regiuni noi. Rezultă relația $R_{n+1} = R_n + (n+1)$.
Iterăm această relație (dăm valori lui *n*):
$n = 1 \Rightarrow R_2 = R_1 + 2$, $n = 2 \Rightarrow R_3 = R_2 + 3$, $n = 3 \Rightarrow R_4 = R_3 + 4$,...
$n = n - 1 \Rightarrow R_{n-1} = R_{n-2} + (n-1)$. $n = n \Rightarrow R_n = R_{n-1} + n$. Adunăm relațiile
$\Rightarrow R_n = R_1 + (2 + 3 + \ldots + n) = 2 + \dfrac{n(n+1)}{2} - 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.
g) Când ducem o dreaptă, obținem 2 regiuni pe care le colorăm diferit. Când ducem a doua dreaptă, ea desparte planul în două semiplane. Într-unul păstrăm colorarea precedentă, iar în celălalt schimbăm fiecare culoare (ce era cu alb se colorează cu negru şi invers). În felul acesta, oricare 2 suprafețe vecine vor avea culori diferite. Când ducem a treia dreaptă procedăm asemănător şi, după ce ducem a 2010-a dreaptă am obținut colorarea cerută.