

CONCURSUL NATIONAL DE MATEMATICA EUCLID
ETAPA FINALĂ

08 06 2013

Clasa a VIII-a

NOTĂ. Toate subiectele sunt obligatorii. Se cer rezolvările complete la fiecare subiect.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 2 ore și 30 de minute.

SUBIECTUL I (20p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

- (20p) Printr-un punct din interiorul unui paralelipiped dreptunghic ducem 3 plane paralele cu fețele. Descompunem astfel paralelipipedul dat în 8 paralelipipe mici. Să se arate că cel puțin 4 dintre aceste paralelipipe mici au volumul mai mic sau egal cu $\frac{1}{8}$ din volumul paralelipipedului dat.

SUBIECTUL II (20p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Spunem că o mulțime nevidă de numere naturale este „*simpatică*”, dacă orice submulțime finită și nevidă a sa are media aritmetică a elementelor un număr natural.

- (10p) a) Să se arate că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există o mulțime M , formată din n numere naturale diferite, care să fie „*simpatică*”.
- (10p) b) Să se arate că nu există o mulțime infinită, formată din numere naturale diferite, care să fie „*simpatică*”.

SUBIECTUL III (20p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Se consideră mulțimea S formată din toate soluțiile reale ale ecuațiilor de forma $x^2 + ax + b = 0$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$.

- (10p) a) Să se arate că $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin S$.
- (10p) b) Să se arate că, dacă I este un interval deschis și nevid, atunci $I \cap S \neq \emptyset$.

SUBIECTUL IV (30p) (Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă)

Ioana are 16 cuburi din carton cu muchiile de lungimi 11, 12, 13, ..., respectiv 26.

- (10p) a) Să se arate că poate împărți cele 16 cuburi în 2 grupe astfel încât suma lungimilor muchiilor cuburilor din prima grupă să fie egală cu suma lungimilor muchiilor cuburilor din a doua grupă.
- (10p) b) Să se arate că poate împărți cele 16 cuburi în 2 grupe astfel încât suma ariilor totale ale cuburilor din prima grupă să fie egală cu suma ariilor totale ale cuburilor din a doua grupă.
- (10p) c) Să se arate că poate împărți cele 16 cuburi în 2 grupe astfel încât suma volumelor cuburilor din prima grupă să fie egală cu suma volumelor cuburilor din a doua grupă.

Test conceput de LAVINIA SAVU, MARIA IONESCU, VALENTIN MITREA și VALERIU IOVAN