

ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARGEȘ

Olimpiada Națională de Matematică
- etapa locală - 13.02.2010

Barem de corectare – Clasa a VIII-a – varianta 1

1. Se scrie $\sqrt{(x-a)^2 + (y-1)^2 + 4}$ 2p

și $\sqrt{(x-2)^2 + (y-b)^2 + 1} \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow (x-a)^2 + (y-1)^2 = 0 = (x-2)^2 + (y-b)^2 = 0 \Rightarrow$ 2p

$\Rightarrow a = 2$ și $b = 1$ 1p

2. a) $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \Rightarrow y = x^2 + x + 1$ 0,5 p

$y = x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ 1 p

dar $(x + \frac{1}{2})^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow y > 0$ 0,5

b) $(x - \frac{1}{x})^3 = 64 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4$ 0,5 p

$x - \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow (x - \frac{1}{x})^2 = 16$ 0,5 p

$(x - \frac{1}{x})^2 = 16 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 18$ 0,5 p

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 18 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 20 \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 20$ 0,5 p

$(x + \frac{1}{x})^2 = 20 \Rightarrow |x + \frac{1}{x}| = \sqrt{20} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$ sau $x + \frac{1}{x} = -2\sqrt{5}$.. 0,5 pc

Caz I. $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5} \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^3 = 40\sqrt{5} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 34\sqrt{5}$ 0,5 p

$(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = 18 \Rightarrow x^4 + \frac{1}{x^4} = 322$ 0,5 p

$E = (x^4 + \frac{1}{x^4}) + (x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) = 322 + 34\sqrt{5} + 18 + 2\sqrt{5} = 340 + 36\sqrt{5}$.. 0,5

Cazul II. $x + \frac{1}{x} = -2\sqrt{5} \Rightarrow (x + \frac{1}{x})^3 = -40\sqrt{5} \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = -34\sqrt{5}$... 0,5 p

$E = (x^4 + \frac{1}{x^4}) + (x^3 + \frac{1}{x^3}) + (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (x + \frac{1}{x}) = 322 - 34\sqrt{5} + 18 - 2\sqrt{5} = 340 - 36\sqrt{5}$

.....0,5 p

ROMÂNIA
MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ȘI SPORTULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ARGEȘ

3. i. a).

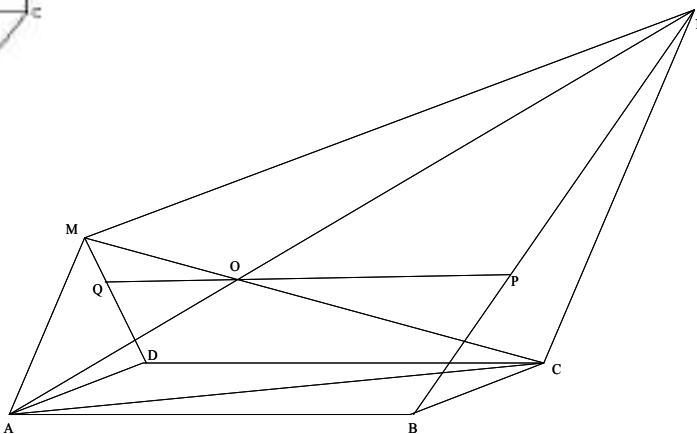
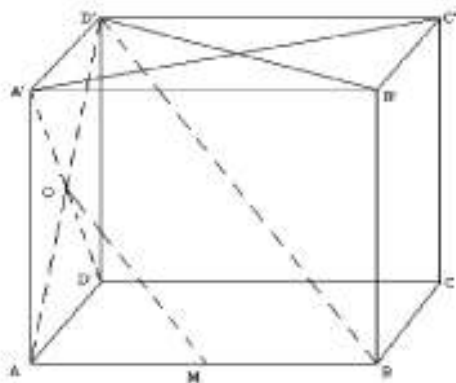
$OM \parallel BD'$ (l. m. în $\triangle ABD'$) 1p

$BD' \subset (DBB') \Rightarrow OM \parallel (DBB')$ 2p

b). $\left. \begin{array}{l} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp BB' \end{array} \right\} \Rightarrow A'C' \perp (BB'D) \Rightarrow A'C' \perp BD'$ 1,5p

$\left. \begin{array}{l} A'D \perp AD' \\ A'D \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow A'D \perp (ABD') \Rightarrow A'D \perp BD'$ 1,5p

$\left. \begin{array}{l} BD' \perp (A'C'D) \\ OM \parallel BD' \end{array} \right\} \Rightarrow OM \perp (A'C'D)$ 1p



4. a) $AM \parallel CN \Rightarrow ACNM$ trapez $\Rightarrow AN \cap CM = \{O\}$ (fiind diagonale) 2 p

$AN \subset (ABN)$

$CM \subset (CDM) \Rightarrow (ABN) \cap (CDM) = d, O \in d$, deci cele 2 plane nu sunt paralele. .. 2 p

b) $\frac{AO}{ON} = \frac{MO}{OC} = \frac{AM}{CN} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{NO}{AN} = \frac{4}{5} = \frac{NP}{NB} = \frac{OP}{AB}$ 1 p

$\frac{MO}{MC} = \frac{MQ}{MD} = \frac{OQ}{CD} = \frac{1}{5}$ 1 p

$\Rightarrow OQ = 4$ cm; $OP = 16$ cm $\Rightarrow PQ = 20$ cm. 1 p