OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a VII- a

13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Să se demonstreze că:

$$\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}, \forall x \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \forall n \in \mathbb{N}.$$

4p) b) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ pentru care este verificată egalitatea:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \ldots + \frac{x+2009}{2010} = \frac{5}{2x+3} + \frac{6}{2x+4} + \ldots + \frac{2013}{2x+2011}$$

SUBIECTUL II (7p)

Se dau numerele raționale $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ astfel încât: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = 1 - \frac{1}{a_1+1}$;

$a_3 = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 + 1}$; … ; $a_{2010} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_{2009} + 1}$.

Să se arate că:

3p) a) $a_1, a_2, \ldots, a_{2010} > 0$

4p) b) $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2010} < 1$

SUBIECTUL III (7p)

7p) Se dă un triunghi cu laturile de lungimi a, b respectiv c, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Să se stabilească natura triunghiului ştiind că perimetrul său este un număr impar.

SUBIECTUL IV(7p)

Considerăm triunghiul isoscel ABC $([AB] \equiv [AC])$ cu $[AD]$ mediană şi $(DM$ bisectoarea unghiului ADC unde $M \in AC$. Perpendiculara din D pe AB intersectează pe AC în Q şi pe AB în N. Arătați că:

4p) a) $\left(\frac{AM}{MC}\right)^2 = \frac{AN}{NB}$;

3p) b) triunghiul MDQ este isoscel.

G.M. 7-8-9/2009, problema E:13785

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.