

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a VII- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) $x + n \geq n + 1, \forall x \in \mathbb{N}^*$	1p
$2x + n + 1 \geq n + 3, \forall x \in \mathbb{N}^*$	1p
Finalizare	1p
b) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} + \dots + \frac{x+2009}{2010} > 2009, \forall x > 1$	1p
$\frac{5}{2x+3} + \dots + \frac{2013}{2x+2011} < 2009, \forall x > 1$	1p
Pentru $x = 0$ raționament analog	1p
$x = 1$ soluție unică	1p

SUBIECTUL II (7p)

a) $a_1 = \frac{1}{2} > 0; \quad a_2 = 1 - \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{a_1}{a_1 + 1} > 0$ $a_3 = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 + 1} = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + 1} > 0$ 	2p
$a_{2010} = 1 - \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_{2009} + 1} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2009}}{a_1 a_2 \dots a_{2009} + 1} > 0$	1p
b) $a_2 = \frac{a_1}{a_1 + 1} \Rightarrow a_2(a_1 + 1) = a_1 \Rightarrow a_2 a_1 + a_2 = a_1 \Rightarrow a_2 = a_1 - a_1 a_2$ $a_3 = \frac{a_1 a_2}{a_1 a_2 + 1} \Rightarrow a_3(a_1 a_2 + 1) = a_1 a_2 \Rightarrow a_3 = a_1 a_2 - a_1 a_2 a_3$ $a_{2010} = \frac{a_1 a_2 \dots a_{2009}}{a_1 a_2 \dots a_{2009} + 1} \Rightarrow a_{2010} = a_1 a_2 \dots a_{2009} - a_1 a_2 \dots a_{2009} a_{2010}$	2p
Adunăm relațiile de mai sus și obținem: $a_1 + a_2 + \dots + a_{2010} = 2a_1 - a_1 a_2 \dots a_{2009} a_{2010} = 1 - a_1 a_2 \dots a_{2010} < 1$	2p

Subiectul III (7p)

$a + b + c = \text{impar} \Rightarrow$ unul sau toate trei impare	1p
Presupun $a \leq b \leq c$ și studiez cazurile $a = 1$ (nu convine)	
$a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = c = 4$ (nu convine) sau $b = 3, c = 6$ (nu convine deoarece nu verifică inegalitatea triunghiulară)	2p
$a = 3 \Rightarrow b = c = 3 \Rightarrow$ triunghi echilateral	1p



Dacă $a \geq 4 \Rightarrow b, c > 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow$ pentru $a \geq 4$ nu mai există situații convenabile	2p
Analog pentru celelalte situații de ordonare a numerelor a, b, c	1p

Subiectul IV (7p)

a) $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{DC}$ (1) din teorema bisectoarei	1p
$\triangle AND \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AD}{DC}$ (2) \Rightarrow din (1) și (2) $\frac{AM^2}{MC^2} = \frac{AN^2}{ND^2}$ (3)	2p
$\triangle AND \sim \triangle DBN \Rightarrow ND^2 = AN \cdot NB$ și finalizare	1p
b) $m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle CDQ) = x \Rightarrow m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC) = x$	1p
DM bisectoare $\Rightarrow m(\sphericalangle ADM) = m(\sphericalangle MDC) = 45^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle MDQ) = m(\sphericalangle DMQ) = 45^\circ + x$	2p