

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a VIII- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) Aplicând $m_a \geq m_g$ obținem $\frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}}{2} \geq 2\sqrt{\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}}$	2p
Finalizare	0,5p
Egalitate pentru $a = b$	0,5p
b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{c}}$	1p
$\frac{c}{a} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{c}{a}}$	1p
Finalizare folosind a) și determinare condiție de egalitate $a = b = c$	1p
c) $x = 0$ soluție unică folosind b)	1p

SUBIECTUL II (7p)

a) $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$	1p
$n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$	1p
$\lceil \sqrt{n(n+1)} \rceil = n$	1p
b) $\left(n + \frac{2}{5}\right)^2 < n(n+1) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$	2p
$10n + 4 < 10\sqrt{n^2 + n} < 10n + 5$	1p
Ultima cifră a numărului $\lceil 10\sqrt{n(n+1)} \rceil$ este 4.	1p

Subiectul III (7p)

Relația dată se rescrie $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ $a = 1$ nu convine	1p
$a = 2 \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = c = 4$ (nu convine) sau $b = 3, c = 6$	2p
Pentru $a \geq 3 \Rightarrow b, c > 3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$	2p
Deci $a = 2, b = 3, c = 6 \Rightarrow d = 7$	1p
Finalizare	1p

Subiectul IV (7p)



<p>Considerăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $MP \cap NQ = \{O'\}$ În triunghiul $\triangle VAC$ construim paralelele $AA' \parallel VO$ și $CC' \parallel VO$ unde punctele $A', C' \in MP$. În mod evident obținem că $\triangle AA'M \sim \triangle VO'M$ și $\triangle CC'P \sim \triangle VO'P$ de unde rezultă egalitățile:</p> $\left. \begin{array}{l} \frac{MA}{MV} = \frac{AA'}{VO'} \\ \frac{PC}{PV} = \frac{CC'}{VO'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{AA'}{VO'} + \frac{CC'}{VO'} = \frac{AA' + CC'}{VO'} \quad (1)$			3p
<p>În trapezul $AA'C'C$ avem OO' linie mijlocie, deci $AA' + CC' = 2 \cdot OO'$ (2) Din relațiile (1) și (2) rezultă că: $\frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{2 \cdot OO'}{VO'}$</p>			3p
<p>În mod analog se arată că: $\frac{NB}{NV} + \frac{QD}{QV} = \frac{2 \cdot OO'}{VO'}$ de unde rezultă egalitatea dorită.</p>			1p