

1. CLASA a VIII-a OLM

— Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$a^2 + b^2 - 3a - 5b + \frac{33}{4} = 0.$$

Să se demonstreze că $4 \leq a+b+1 \leq 6$.

G.M.B 10/2009

BAREM DE CORECTARE

(1p)

$$4a^2 + 4b^2 - 12a - 20b + 33 = 0$$

(1p)

$$4a^2 - 12a + 9 + 4b^2 - 20b + 25 = 1$$

(1p)

$$(2a-3)^2 + (2b-5)^2 = 1$$

(2p)

$$-1 \leq 2a-3 \leq 1$$

$$-1 \leq 2b-5 \leq 1$$

(1p)

$$1 \leq a \leq 2$$

$$2 \leq b \leq 3$$

(1p)

$$4 \leq a+b+1 \leq 6$$

ASA a VIII a OLM
 să se determine numerele întregi m și n , dacă

$$\frac{m}{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}} + \frac{n}{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{19-8\sqrt{3}}$$

Ion. Tiohori

BAREM DE CORECTARE

(2p)

$$\sqrt{2(2+\sqrt{3})} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \sqrt{3}+1$$

$$\sqrt{2(2-\sqrt{3})} = \sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{3}-1$$

(2p)

$$\frac{m}{\sqrt{3}+1} + \frac{n}{\sqrt{3}-1} = 4-\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3}-1)m + (\sqrt{3}+1)n = 4-\sqrt{3}$$

(1p)

$$(-m+n) + (m+n)\sqrt{3} = 2(4-\sqrt{3})$$

(2p)

$$\begin{cases} -m+n = 8 \\ m+n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{(-5; 3)\}$$

$m, n \in \mathbb{Z}$

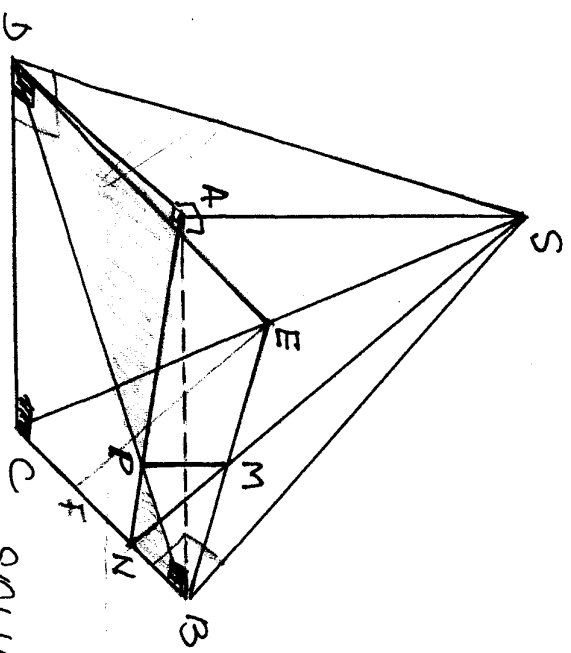
PROBLEME - OLIMPIADĂ - CLASA a VIII-a

Pe planul dreptunghiului ABCD ($\angle A > \angle B < C$) se trasează perpendiculara SA. Dacă E este mijlocul segmentului [SE] se cere:

- a) Demonstrați că triunghiul DEB este isoscel.
- b) Arătați că $[BD] < \sqrt{3} [SC]$
- c) Dacă M este mijlocul lui [BE], $SM \cap BE = \{N\}$ iar $BD \cap AN = \{P\}$, arătați că $MP \parallel (SAD)$.

PROF. NICOLAE JUREȘTIĂ

- MEDGIDIA -



SOLUȚIE

a) Demonstrați că $SB \perp BC$ și $SD \perp DC$ 1p
 Demonstrați că $BE = \frac{1}{2} SC$ și $DE = \frac{1}{2} SC \Rightarrow [BE] = [DE]$ 1p

b) În $\Delta BDE : [BD] < [BE] + [DE]$ 0,5p
 dar $[BE] + [DE] = \frac{1}{2} [SC] + \frac{1}{2} [SC] = [SC] \Rightarrow [BD] < [SC]$ 0,5p

c) Construcție EF || SN $\Rightarrow MN =$ linie mijl. în $\Delta BEF = \frac{1}{2} [EF]$ 0,5p
 $\Rightarrow [BN] \in [NF]$ și $[EF] = 2[MN]$. Dacă $[EF] = 2a$ și $[MN] = a$ 0,5p
 În $\Delta SNE : \angle E = \angle$ ungl. $\Rightarrow [SN] = 2[EF] = 4a \Rightarrow [CF] = [FN]$ 0,5p
 Arătați că $[BN] = \frac{1}{3} [BC]$ $\Rightarrow [BN] = \frac{1}{3} [AD]$ 0,5p
 Dem. că $\Delta PBN \sim \Delta PDA \Rightarrow \frac{PN}{PA} = \frac{BN}{AD} = \frac{1}{3}$ 0,5p
 În $\Delta NSA : \frac{NM}{NS} = \frac{1}{3} = \frac{PN}{NA}$ $\xrightarrow{\text{R.T.H.}}$ $MP \parallel SA$ 1p

Deoarece : $MP \parallel SA$
 $SA \subset (SAD)$ $\Rightarrow MP \parallel (SAD)$ 0,5p

TOTAL = 7p.

ie $ABCD A' B' C' D'$ cu latura de 9 cm.
din fiecare vârf se măsoară câte o piramidă regulată
cu muchiile laterale de 3 cm.

- a) Calculați aria totală a corpului obținut.
- b) Calculați lungimea segmentului pe diagonală
cubului de planșe bazelor piramidalelor.

~~Întrebare~~ Se numerește pe fiecare vârf al corpului
cu numere de la 1 la 24.

Notăm cu $S_k, k \in \{1, \dots, 8\}$, suma numerelor
care sprijină toate vârfurile ~~sumă~~ ~~triunghiurilor~~
numei fețe ~~triunghiurilor~~ a corpului.

- c) Arătați că există o numărătoare a vârfurilor
astfel încât $S_k \equiv 3, \forall k, k \in \{1, \dots, 8\}$.

- d) Arătați că nu există o numărătoare a
vârfurilor astfel încât

$$3 \mid S_k \quad \forall k \in \{1, \dots, 8\}$$

~~prof.~~ $\in \{1, \dots, 8\} \setminus \{k\}$
prof. ALEX. CARENARU.

BAREM DE CORECTARE

a) Determinarea ariei unei triunghi $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm²
Determinarea ariei totale $18(21 + 2\sqrt{3})$ cm²

b) Determinarea înălțimii unei piramide regulată $\sqrt{3}$ cm
Determinarea lungimii segmentului de diagonală $7\sqrt{3}$ cm

c) Prezentarea unei numărătoari astfel încât
orice sumă S_k este divizibilă cu 3.

d) Presupunem că există o numărătoare astfel
încât $3 \mid S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, 8\}$
Dar $S_1 + S_2 + \dots + S_8 = 1 + \dots + 24 = 12 \cdot 25 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow$