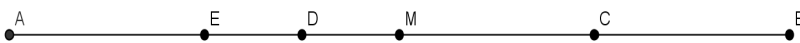


SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNTAJ TOTAL		
1	a	$x = \left[ 1 + (2^2 \cdot 3^4) : (2^2 \cdot 3^2) - 8 \right]^{67 \cdot 30}$	1p		
		$x = (1 + 3^2 - 8)^{2010} = 2^{2010}$	1p		
		$y = (2^4)^{1000} : (2^2)^{1000} \cdot 2 = 2^{4000} : 2^{2000} \cdot 2 = 2^{2001}$	1p		
		$z = 430 \cdot (1326 - 1300) - 26 \cdot 429 + 486 = 430 \cdot 26 - 26 \cdot 429 + 486$ $z = 26 \cdot (430 - 429) + 486 = 512$	1p		
1	b	$(2^{2010} : 2^{2001} - 512)^{2010} = (2^9 - 512)^{2010} = 0^{2010} = 0$	1p		
		c	$U(2^{2001}) = U(2^{4 \cdot 500 + 1}) = 2$	1p	
			d	$x = 2^{2010} = (2^{1005})^2$ este pătrat perfect	1p
				$x = 2^{2010} = (2^{670})^3$ este cub perfect	
2	$3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2010} = (3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8) +$ $+ (3^9 + 3^{10} + 3^{11} + 3^{12} + 3^{13} + 3^{14} + 3^{15}) + \dots +$ $+ (3^{2004} + 3^{2005} + 3^{2006} + 3^{2007} + 3^{2008} + 3^{2009} + 3^{2010}) =$ $= 3^2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) + 3^9 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) + \dots +$ $+ 3^{2004} \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) =$ $= (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) \cdot 3^2 \cdot (1 + 3^7 + 3^{14} + \dots + 3^{2002}) =$ $= 1093 \cdot 3^2 \cdot (1 + 3^7 + 3^{14} + \dots + 3^{2002})$ Cum 1093 este număr prim, avem a=1093, b=3 Finalizare $a + b^6 + 2 \cdot b^4 + b^3 - b^0 = 1093 + 729 + 162 + 27 - 1 = 2010$			2p	
	2p				
	2p				
	1p				
3		Deoarece $\overline{ab6}$ este un număr de trei cifre rezultă $a+b+1 \in \{7, 8, 9\}$	2p		
		Cum $U(\overline{ab6}) = 6$ și $U(2^{4k}) = 6$ rezultă că	2p		
		$a+b+1=8$ sau $a+b=7$	1p		
		Deci $2^{a+b+1} = 2^8 = 256$ $a=2$ și $b=5$	1p		
		1p			

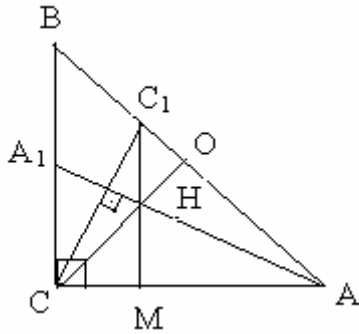
4	<p>Fie mulțimea divizorilor lui <math>n</math> :</p> $1=d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_{k-1} < d_k=n$ $1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{k-1} + n = n+7$ $d_2 + d_3 + \dots + d_{k-1} = 6, \text{ dar } d_2 \geq 2, d_3 \geq 3$ $\Rightarrow k=4 \text{ și } n=8$ <p>Avem <math>d_2=2, d_3=4, d_4=n=8</math> și <math>1+2+4+8=8+7</math></p>	<p><b>2p</b>  <b>2p</b>  <b>1p</b>  <b>1p</b>  <b>1p</b></p>
---	--	--

Clasa a VI-a

PROBLEMA		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		$\left. \begin{array}{l} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \mid \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} \\ \frac{y}{6} = \frac{z}{5} \mid \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{12} = \frac{z}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{10} = k$	3p
		$\left. \begin{array}{l} x=9k, y=12k, z=10k \\ 2x+3y+4z=188 \end{array} \right\} \Rightarrow 94k = 188 \Rightarrow k = 2$	2p
		$x=18, y=24, z=20$	2p
2		$B = 111(a + b + c)$	1p
		$B = 3 \cdot 37(a + b + c), 57 = 3 \cdot 19$	2p
		<p>Cum B se divide cu 57 <math>\Rightarrow 19 \mid (a+b+c)</math>, deci <math>a+b+c=19</math></p>	1p
		<p>Dar <math>9 \mid A</math>, cum <math>A = 999a + 99a + 9b + a + a + b + c</math>, avem:</p>	1p
		<p><math>9 \mid (2a+b+c)</math>, adică <math>9 \mid (a+19) \Rightarrow a=8</math>, deci <math>b+c=11</math></p> <p><math>5 \mid A</math>, dar <math>A = 1000a + 100a + 10b + c</math> deci <math>c=5</math> și rezultă <math>b=6</math></p> <p>Deci <math>A=8865</math></p>	2p
3	a	$AC = AB - BC = AB - \frac{AB}{4} = \frac{3AB}{4}$	1p
			1p
		$AD = DC = \frac{AC}{2} = \frac{3AB}{8}$	1p
		$AE = AD - DE = AD - \frac{AD}{3} = \frac{2AD}{3} = \frac{2 \cdot 3AB}{3 \cdot 8} = \frac{AB}{4}$	1p
		<p>Din ipoteză avem: <math>BC = \frac{AB}{4}</math></p>	
		<p>Deci <math>[AE] \equiv [BC]</math></p>	1p

	<b>b</b>	<p>Fie O mijlocul lui <math>[EC] \Rightarrow CO = OE = \frac{EC}{2} = \frac{AB}{4}</math></p> $EC = AB - AE - CB = AB - \frac{AB}{4} - \frac{AB}{4} = \frac{AB}{2}$ $AO = AE + EO = \frac{AB}{2}$ <p>Fie M mijlocul segmentului <math>[AB]</math>, atunci:</p> $AM = MB = \frac{AB}{2}, AO = \frac{AB}{2}, \text{ deci } AM=AO, \text{ adică punctele } O \text{ și } M \text{ coincid} \Rightarrow \text{că segmentele } AB \text{ și } CE \text{ au același mijloc}$	<b>1p</b>
	<b>c</b>	$DM = AM - AD = \frac{AB}{2} - \frac{3AB}{8} = \frac{AB}{8}$ $\frac{AB}{8} = 4 \Rightarrow AB = 32$	<b>1p</b>
<b>4</b>	<b>a</b>	<p>Notăm <math>m(\angle AOC) = x</math></p> $m(\angle COD) = 180^\circ - (90^\circ - x) = 90^\circ + x$ $m(\angle BOD) = 90^\circ - 2x$ $m(\angle COM) = \frac{1}{2}m(\angle BOD) + m(\angle COD) = \frac{90^\circ - 2x}{2} + 90^\circ + x = 135^\circ$	<b>1p</b>
	<b>b</b>	$\frac{m(\angle AOC) + m(\angle COD)}{2} + m(\angle DOM) = \frac{x}{2} + \frac{90^\circ + x}{2} + \frac{90^\circ - 2x}{2}$ <p>Finalizare <math>\frac{m(\angle AOC) + m(\angle COD)}{2} + m(\angle DOM) = 90^\circ</math></p>	<b>2p</b>
			<b>1p</b>

PROBLEMA	SUBIECTUL	PUNCTAJ TOTAL
<b>BAREM DE CORECTARE</b>		
<b>1</b>	<p>Ar trebui să avem: <math>2010 = a^2 - b^2</math>, <math>a, b \in \mathbb{Z}</math>  Deci <math>2010 = (a-b)(a+b)</math>.  Avem două cazuri.  <b>Cazul 1:</b> Dacă <math>a</math> și <math>b</math> au aceeași paritate <math>\Rightarrow (a-b):2</math> și <math>\Rightarrow (a+b):2</math>, deci <math>(a^2 - b^2):4</math>, dar 2010 nu este divizibil cu 4. Deci egalitatea este imposibilă  <b>Cazul 2:</b> Dacă <math>a</math> și <math>b</math> au parități diferite, atunci <math>a^2 - b^2</math> este un număr impar, dar 2010 este par. Deci egalitatea este imposibilă  <b>Concluzie:</b> Nu există <math>a, b \in \mathbb{Z}</math> astfel încât <math>a^2 - b^2 = 2010</math></p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>3p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<b>a</b>	$\frac{3a+4b+5c}{2a+3b} = \frac{3b+4c+5a}{2b+3c} = \frac{3c+4a+5b}{2c+3a} = \frac{12(a+b+c)}{5(a+b+c)} = \frac{12}{5}$ $A = \sqrt{\frac{3a+4b+5c}{10a+15b} + \frac{3b+4c+5a}{10b+15c} + \frac{3c+4a+5b}{10c+15a}} =$ $A = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \left( \frac{3a+4b+5c}{2a+3b} + \frac{3b+4c+5a}{2b+3c} + \frac{3c+4a+5b}{2c+3a} \right)}$ $= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \left( \frac{12}{5} + \frac{12}{5} + \frac{12}{5} \right)} = \frac{6}{5}$ <p style="text-align: center;">Finalizare [A]=1</p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<b>b</b>	<p>Folosind punctul a) și inegalitatea mediilor găsim :</p> $\frac{3a+4b+5c}{\sqrt{6ab}} = \frac{12}{5} \cdot \frac{2a+3b}{\sqrt{6ab}} \geq \frac{12}{5} \cdot \frac{2a+3b}{\frac{2a+3b}{2}} = \frac{24}{5}$ $\sqrt{\frac{3a+4b+5c}{\sqrt{6ab}} + \frac{3b+4c+5a}{\sqrt{6bc}} + \frac{3c+4a+5b}{\sqrt{6ca}}} =$ $= \sqrt{\frac{12}{5} \cdot \frac{2a+3b}{\sqrt{6ab}} + \frac{12}{5} \cdot \frac{2b+3c}{\sqrt{6bc}} + \frac{12}{5} \cdot \frac{2c+3a}{\sqrt{6ca}}} \geq$ $\geq \sqrt{\frac{24}{5} + \frac{24}{5} + \frac{24}{5}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>



3

Construim  $C_1M \parallel BC$ ,  $M \in (AC)$ .

Fie  $\{H\} = (AA_1) \cap (C_1M)$ .

$\triangle AHC_1 \sim \triangle AA_1B$  (teorema fundamentală a asemănării) (1)

Fie  $\{O\} = (CH) \cap (AB)$

$C_1M \perp AC$  ( $C_1M \parallel BC$ ) (2)

$CC_1 \perp AA_1$  (ipoteză)  $\Leftrightarrow AH \perp CC_1$  (3)

Din (2) și (3) rezultă că H este ortocentrul  $\triangle ACC_1$

Deci  $CH \perp AB \Rightarrow CO$  este mediană în  $\triangle ABC$  (dreptunghic isoscel)

Deoarece CO și  $AA_1$  sunt mediane în  $\triangle ABC$  rezultă că H este centrul de greutate al  $\triangle ABC$ .

Avem  $\frac{A_1H}{HA} = \frac{1}{2}$ . Folosind relația (1) găsim  $\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{1}{2}$

1p

2p

1p

2p

1p

4	$\Delta ABC$ isoscel $\Rightarrow AB=AC$ sau $AB=BC$ sau $AC=BC$	1p
	<b>Cazul 1:</b> $AB=AC$ , $CG=AB$ și $GP = \frac{CG}{2} = \frac{AB}{2}$ , cum GP este mediană în	
	$\Delta AGB \Rightarrow m(\angle AGB) = 90^0$ , deci $BG \perp AG$ (1)	
	$\Delta BAG \equiv \Delta CAG$ (L.U.L) $\Rightarrow \angle AGB \equiv \angle AGC \Rightarrow CG \perp AG$ (2)	
	Din (1) și (2) avem că dreptele CG și BG coincid sau sunt paralele $\Rightarrow$ contradicție.	2p
	<b>Cazul 2:</b> $BC=BA$ , de unde $AM=CP$ , $CG=AB$ și $GP = \frac{CG}{2} = \frac{AB}{2}$ , cum GP	
este mediană în $\Delta AGB \Rightarrow m(\angle AGB) = 90^0$ , deci $BG \perp AG$ (3)		
$\Delta BAG \equiv \Delta BCG$ (L.U.L) $\Rightarrow \angle AGB \equiv \angle CGB \Rightarrow CG \perp BG$ (4)		
Din (3) și (4) avem că dreptele AG și CG coincid sau sunt paralele $\Rightarrow$ contradicție	1p	
<b>Cazul 3:</b> $AC=BC$ , $CG=AB$ și $GP = \frac{CG}{2} = \frac{AB}{2}$ , cum GP este mediană în		
$\Delta AGB \Rightarrow m(\angle AGB) = 90^0$ , deci $BG \perp AG$ .		
Deoarece M și N sunt mijloacele laturilor BC și AC avem: MN linie mijlocie în $\Delta ABC$ , deci $MN \parallel AB$ , dar $AM=BN \Rightarrow ABMN$ este trapez isoscel		
ortodiagonal, $A_{ABMN} = \frac{d^2}{2} = \frac{72}{2} = 36 \text{ cm}^2$ , unde $d=AM$	1p	
Dar într-un trapez isoscel ortodiagonal aria este egală si cu pătratul înălțimii, unde înălțimea este media aritmetică a bazelor .	1p	
Fie $\{T\} = CP \cap MN \Rightarrow TP = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$ .		
MN fiind linie mijlocie în $\Delta ABC$ , avem : $CT=TP=6 \text{ cm}$ , deci $CP=12 \text{ cm}$	1p	

SUBIECTUL		BAREM DE CORECTARE	PUNCTAJ TOTAL
1		<p>Avem că: <math>\frac{1}{n^3} &lt; \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n} \right]</math> (1)</p> <p>Înlocuind în (1) <math>n \in \{3, 4, 5, \dots, 2010\}</math> și însumând inegalitățile avem:</p>	2p
		$0 < \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3} <$	1p
		$< \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2009 \cdot 2010} \right) < \frac{1}{4}$	2p
		$0 < \sqrt{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3}} < \frac{1}{2} \Rightarrow$	1p
		$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{2009^3} + \frac{1}{2010^3}} \in \left( 0; \frac{1}{2} \right)$	1p
2	a	$\sqrt{17-12\sqrt{2}} = 3-2\sqrt{2}, \sqrt{18-8\sqrt{2}} = 4-\sqrt{2}$ $A = \frac{18-5\sqrt{2}(5+x)}{15}$ $A \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = -5$ <p>Finalizare <math>A = 1\frac{1}{5}</math></p>	2p
		$4020^2 : \left[ (2^5 - 2^3) \cdot 670 \right] + 1 + \frac{6}{5} - \frac{6}{5} = 1006$ $\frac{x+2010}{y+2010} - 1 + \frac{x+2008}{y+2008} - 1 + \frac{x+2006}{y+2006} - 1 + \dots + \frac{x+4}{y+4} - 1 + \frac{x+2}{y+2} - 1 + \frac{x}{y} - 1 = 0$	1p
	b	$(x-y) \cdot \left( \frac{1}{y+2010} + \frac{1}{y+2008} + \frac{1}{y+2006} + \dots + \frac{1}{y+4} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{y} \right) = 0$ <p>Finalizare <math>x=y</math></p>	1p
3	a	<p><math>DB \perp BC</math> și <math>BD = a\sqrt{3}</math></p> <p>Dar <math>MD \perp (ABCD)</math>, deci <math>MD \perp DB</math> cu teorema celor trei perpendiculare, avem <math>MB \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MB = 2a</math></p>	1p
			1p



	b	<p><math>DQ \perp QC</math> și <math>QC = a\sqrt{3}</math>, dar <math>MD \perp (ABCD)</math>, deci <math>MD \perp DQ</math> (<math>MQ = a\sqrt{2}</math>)</p> <p>Cu teorema celor trei perpendiculare, avem</p> $MQ \perp QC \Rightarrow A_{\Delta MQC} = \frac{MQ \cdot QC}{2} = \frac{a^2 \sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2$	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>
	c	<p>Fie <math>DQ \cap BC = \{S\}</math>. În acest caz <math>(MDQ) \cap (MBC) = MS</math>.</p> <p>Construim <math>QE \perp MS</math>, <math>E \in MS</math>. Cum <math>CQ \perp (MDQ)</math> obținem <math>CE \perp MS</math>.</p> $QE = \frac{a\sqrt{5}}{5}$ $\text{tg}(\angle((MDQ), (MBC))) = \text{tg}(\angle CEQ) = \sqrt{15}$	<p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>
4		$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ $d^2 = (4n^4 + 8n^3 + 4n^2) + (4n^4 + 24n^3 + 52n^2 + 48n + 16) +$ $+ (n^4 + 4n^3 + 10n^2 + 12n + 9)$ $d^2 = 9n^4 + 36n^3 + 66n^2 + 60n + 25$ $d^2 = (3n^2 + 6n + 5)^2$ $d = \sqrt{(3n^2 + 6n + 5)^2} = 3n^2 + 6n + 5 \in \mathbb{N}$	<p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>