INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN VÂLCEA
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA VÂLCEA

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010
CLASA A VI- A

SUBIECTUL 1

a) Demonstraţi că $\dfrac{25^n+14\cdot 5^n+33}{2\cdot 5^n+22}\in N$, oricare ar fi numărul natural n.

C-tin Bărăscu
Şc.Nr.5 Rm. Vâlcea

b) Aflaţi numărul natural $\overline{abc}$ ştiind că este cel mai mare divizor comun al numerelor $\overline{2009abc}$ şi $\overline{abc2009}$.

G.M.Nr.5

Soluţie şi barem:

a) Notăm $5^n = x \Rightarrow$ x= număr impar……………………………………………………1p

Fracţia devine : $\dfrac{x^2+14x+33}{2x+22}=\dfrac{(x+11)(x+3)}{2(x+11)}=\dfrac{x+3}{2}$ ……………………………2p

x=număr impar $\Rightarrow$ x+3= număr par $\Rightarrow \dfrac{x+3}{2}\in N$ …………………………………..1p

b) $(\overline{2009abc}, \overline{abc2009}) = \overline{abc} \Leftrightarrow \overline{2009abc} = \overline{abc}\cdot m$ şi $\overline{abc2009} = \overline{abc}\cdot n$,
m,n numere naturale nenule , (m,n)=1 . . ……………………………………………1p
$\overline{abc2009}=(\overline{abc}\cdot 1000+2009)\,\vdots\, \overline{abc} \Leftrightarrow 2009 \,\vdots\, \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}\in\{1,7,41,49,287,2009\}$
$\Rightarrow \overline{abc}=287$ ……………………………………………………………………1p
Verifică: 2872009=287· 10007, 2009287=287· 7001, (10007,7001)=1 …………….1p

SUBIECTUL 2

a) Fie a,b,c $\in N^*$ astfel încât $a^2+b^2+c^2=9^{2012}$. Aflaţi ultima cifră a numărului natural x , ştiind că $a\cdot x=b\cdot c$.

Marcel Neferu
Şc. N. Bălcescu Drăgăşani

b) Scrieţi numărul $A= 1+8+8\cdot 9+8\cdot 9^2+\ldots+8\cdot 9^{98}$ folosind numai trei cifre de 9.

c) GM Nr.6

Soluţie şi barem:

a) $9^{2002}=9^{2010}\cdot 9^2 = 9^{2010}\cdot(1^2+4^2+8^2)= (9^{1005})^2+(9^{1005}\cdot 4)^2+(9^{1005}\cdot 8)^2$……………….1p

I $a= 9^{1005}$, $b=9^{1005}\cdot 4$, $c= 9^{1005}\cdot 8 \Rightarrow x= 9^{1005}\cdot 32 \Rightarrow u(x)=8$ …………………………1p

II $a=9^{1005}\cdot 4$, $b= 9^{1005}$, $c= 9^{1005}\cdot 8 \Rightarrow x= 9^{1005}\cdot 2 \Rightarrow u(x)=8$ …………………………1p

III $a=9^{1005}\cdot 8$, $b= 9^{1005}$, $c= 9^{1005}\cdot 4 \Rightarrow x= 9^{1005} : 2$ nu aparţine lui N…………………..1p

b) $A= 1+8+8\cdot 9+8\cdot 9^2+\ldots+8\cdot 9^{98} = 1+8(1 + 9+ 9^2+\ldots+ 9^{98})$…………………………..1p

$S= 1 + 9+ 9^2+\ldots+ 9^{98}$

$9S= 9+ 9^2+\ldots+ 9^{98}+9^{99}$

$8S= 9^{99}-1$ ……………………………………………………………………1p

$A= 1+9^{99}-1=9^{99}$ ……………………………………………………………..1p

SUBIECTUL 3

Pe semidreapta închisă $[A_1X$ se iau punctele A_2 , A_3 , A_4 ,. . . . , A_{2009} , A_{2010} în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 =. . . . .= A_{2009}A_{2010} = d$, unde $d \le 1$cm şi $d\ge 1$mm.
a) Calculaţi în metri cea mai mică şi cea mai mare valoare a lungimii segmentului $[A_1 A_{2010}]$.
b) Dacă d = 0,2(6)cm , aflaţi lungimea segmentului $[A_{425} A_{2000}]$ şi precizaţi numărul segmentelor $[A_i A_j]$, $1 \le i < j \le 2010$, care sunt congruente cu segmentul $[A_{425} A_{2000}]$.
c)Câte segmente diferite $[A_i A_j]$, $1 \le i < j \le 2010$ au mijlocul în unul din punctele A_2 , A_3 , A_4 ,. . . . , A_{2009} ?

Gheorghe Radu
CNI Matei Basarab Rm. Vâlcea

Soluţie şi barem :

a) $L_{minimă}$=2009mm=2,009m . $L_{maximă}$=2009cm=20,09m……………………………1p

b) $A_{425} A_{2000}$=0,2(6)cm · (2000-425)= 420cm………………………………………..1p

Toate segmentele $[A_i A_j]$, $1\le i <j\le 2010$, cu j-i=2000-425=1575, sunt congruente cu segmentul $[A_{425} A_{2000}]$ ……………………………………………………………1p

Numărul lor este egal cu 2010-1575-1=434……………………………………………1p

c) A_2 este mijlocul unui segm.	A_{2009} este mijlocul unui segm.
A_3 este mijlocul a două segm.	A_{2008} este mijlocul a două segm.
A_4 este mijlocul a trei segm.	A_{2007} este mijlocul a trei segm.
. . . .	. . . .
A_{1005} este mijlocul a 1004 segm.	A_{1006} este mijlocul a 1004 segm.

TOTAL=2 · (1+2+3+….+1004) = 1004 · 1005 = 1 009 020 segmente ……………3p

SUBIECTUL 4

Fie unghiurile adiacente suplementare $\angle AOB$ şi $\angle BOC$ astfel încât raportul măsurilor lor să fie egal cu $\frac{1}{4}$.Fie [OD semidreapta opusă bisectoarei $\angle BOC$. În interiorul $\angle COD$ se consideră punctele M şi N astfel încât m($\angle$CON)= m($\angle$DOM)=2m($\angle$MON) >45^0.

a) Aflaţi măsura $\angle COD$
b) Demonstraţi că punctele B,O,M sunt coliniare.

Delia Badea
Şc.Take Ionescu Rm.Vâlcea

Barem

a) m($\angle$AOB) +m($\angle$BOC)= 180^0……………………………………………………1p
m($\angle$BOC)=4m($\angle$AOB)…………………………………………………………1p
m($\angle$AOB)=36^0 ,m($\angle$BOC)=144^0………………………………………………………..1p
[OF bisectoarea $\angle$BOC $\Rightarrow$ m($\angle$COF)=72^0 $\Rightarrow$ m($\angle$COD)=108^0……………………..1p
b) m($\angle$CON)=2m($\angle$MON) $\Rightarrow$m($\angle$COM)= m($\angle$MON) $\Rightarrow$(OM=bisectoarea $\angle$CON
Analog se arată că m($\angle$MON)= m($\angle$DON) $\Rightarrow$(ON=bisectoarea $\angle$DOM……………..1p
$\Rightarrow$m($\angle$COM)= m($\angle$MON)= m($\angle$DON)=36^0…………………………………………1p
$\Rightarrow$m($\angle$BOM)=180^0 $\Rightarrow$ B,O,M coliniare………………………………………………..1p