

BAREM

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ – 13.02.2010 CLASA A VII- A

SUBIECTUL I

Rezolvați în \mathbb{N}^* ecuația:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{2n}{(n+1)(n+3)} + \frac{3n}{(n+3)(n+6)} + \frac{4n}{(n+6)(n+10)} + \frac{5n}{(n+10)(n+15)} = \frac{n+5}{2n+5}$$

Prof. Alexandru Banu, Cernișoara, Vâlcea

Rezolvare :

$$\mathbb{R} \left(\frac{1}{n(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} + \frac{3}{(n+3)(n+6)} + \frac{4}{(n+6)(n+10)} + \frac{5}{(n+10)(n+15)} \right) = \dots\dots\dots 2p$$

$$\mathbb{R} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+6} + \frac{4}{n+6} - \frac{1}{n+10} + \frac{5}{n+10} - \frac{1}{n+15} \right) = \dots\dots\dots 2p$$

$$\mathbb{R} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+15} \right) = \frac{15}{n+15} \dots\dots\dots 1p$$

Deci $\frac{15}{n+15} = \frac{n+5}{2n+5} \dots\dots\dots 0,5p$

Finalizare $n=10 \dots\dots\dots 1,5p$

Oficiu $\dots\dots\dots 3p$

www.mategl.com

SUBIECTUL II

a) Determinați valoarea raportului $\frac{17a-7b}{7a+3b}$, știind că : $\frac{2a-b}{a+2b} = \frac{1}{2}$.

G.M.10

Rezolvare :

$$\frac{2a-b}{a+2b} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(2a-b) = a+2b \dots\dots\dots 1p$$

$$a = \frac{4}{3}b \dots\dots\dots 1p$$

Înlocuind în raport obținem : $\frac{17a-7b}{7a+3b} = \frac{b \cdot \frac{47}{3}}{b \cdot \frac{27}{3}} \dots\dots\dots 1p$

Dacă $b=0 \Rightarrow \frac{2a}{a} = \frac{1}{2}$ Fals $\Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow$ valoarea raportului 1, (270).....1p

b) Fie $a, b, c, k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a^{4k}}{b^{2k}c^{2k}}, \frac{b^{4k}}{a^{2k}c^{2k}}, \frac{c^{4k}}{a^{2k}b^{2k}}$ să fie numere naturale. Demonstrați că :
 $a^{6k} + b^{6k} + c^{6k} = 3(a^2b^2c^2)^k$.

G.M.7-8-9/2009

Rezolvare :

$$\frac{a^{4k}}{b^{2k}c^{2k}} = \left(\frac{a^2}{bc}\right)^{2k} \in \mathbb{N} \Rightarrow a^2 = bcm, m \in \mathbb{N}^*$$

Analog avem $b^2 = acn, n \in \mathbb{N}^*$ și $c^2 = bap, p \in \mathbb{N}^*$ 1,5p

Înmulțind relațiile obținem $a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2 mnp$. Cum

$$a, b, c \in \mathbb{N}^* \Rightarrow mnp = 1 \Rightarrow m = n = p = 1 \Rightarrow a = b = c$$

.....1p

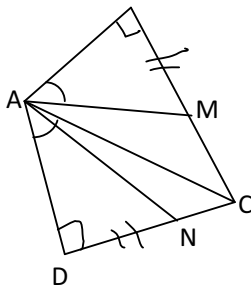
$$a^{6k} + b^{6k} + c^{6k} = 3(a^2b^2c^2)^k \Rightarrow 3a^{6k} = 3a^{6k} \text{0,5p}$$

Oficiu3p

SUBIECTUL III

a) În patrulaterul ABCD, unghiurile $\angle ABC$ și $\angle ADC$ sunt drepte. Pe laturile [BC] și [DC] luăm punctele M și respectiv N, astfel încât $BM=DN$ și $\angle BAM \equiv \angle DAN$. Să se arate că $BC=CD$ și că diagonalele patrulaterului ABCD sunt perpendiculare.

Rezolvare :



$$\triangle ABM \equiv \triangle ADN (C.U.) \Rightarrow [AB] \equiv [AD] \text{ 1.5p}$$

$$\triangle ABC \equiv \triangle ADC (C.I.) \Rightarrow [BC] \equiv [DC] \text{1.5p}$$

$$\angle BAC \equiv \angle DAC \text{ și } [AB] \equiv [AD] \Rightarrow AC \perp BD \text{ 1p}$$

www.mategl.com

b) Pe un cerc sunt scrise numerele naturale de la 1 la N, astfel încât fiecare două numere vecine să aibă cel puțin o cifră comună. Să se găsească cel mai mic număr N pentru care se poate realiza acest lucru și să se dea un astfel de exemplu.

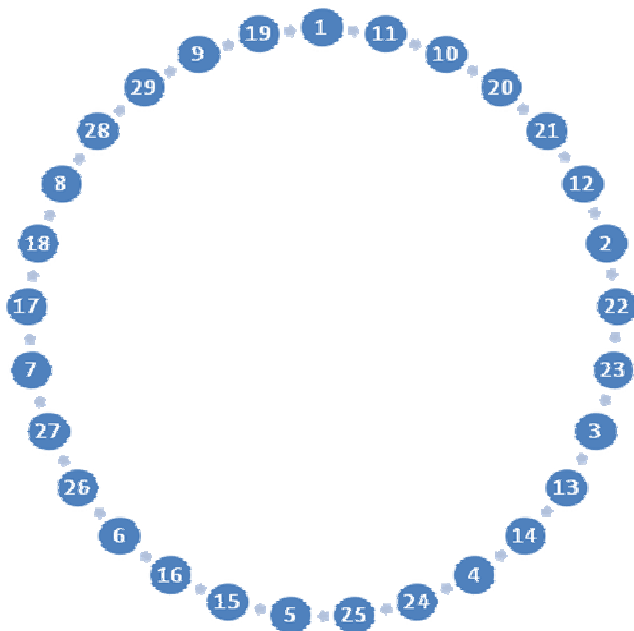
Prof. Adrian Burlan, Rm. Vâlcea

Rezolvare :

$N > 9$ deoarece pentru numerele de o cifră cerința problemei nu este satisfăcută. Cele mai mici valori care pot fi scrise pe cerc ca vecini ai lui 9 sunt 19 și 29.

Deci $N \geq 29$ 1,5p

Pentru $N=29$ se poate configura astfel:



.....1,5p

Oficiu3p

www.mategl.com

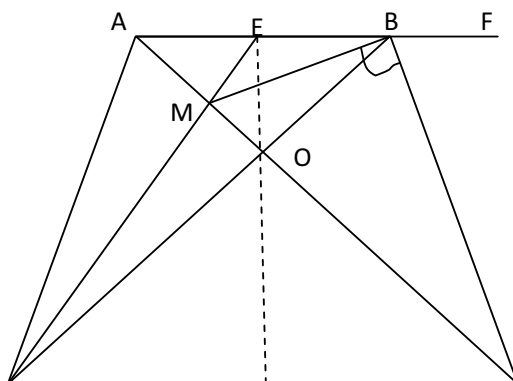
SUBIECTUL IV

În trapezul isoscel $ABCD$, baza mare $[CD]$ este congruent cu diagonala $[AC]$, iar $AC \cap BD = \{O\}$. Dacă $BM \perp BC$, $M \in [AC]$ și $DM \cap [AB] = \{E\}$, demonstrați că :

- a) $\angle ABM \equiv \angle OBM$; b) $EO \perp DC$.

Prof. Leon Genoiu, Rm. Vâlcea

Rezolvare :



D

C

Cum $AC=BD=DC \Rightarrow \angle DBC \equiv \angle DCB$ 1p

$m(\angle ABC) + m(\angle BCD) = 180^\circ$ și $m(\angle MBC) = 90^\circ$ rezultă $m(\angle ABM) + m(\angle BCD) = 90^\circ$

Cum $\angle DBC \equiv \angle DCB \Rightarrow \angle ABM \equiv \angle OBM$ (complemente congruente)1p

b)

Fie $F \in (AB, a. \hat{i}. B \in [AF] \Rightarrow \angle FBC \equiv \angle DCB$ (alt. int.) $\Rightarrow \angle DBC \equiv \angle CBF$ 1p

Cu teorema bis. Int și Ext. $\triangle ABO \Rightarrow \frac{MO}{MA} = \frac{CO}{CA}$ (rel. 1) 1p

Th. Menelaos în $\triangle ABO$ și transversal $\overline{E, M, D} \Rightarrow \frac{DO}{DB} * \frac{EB}{EA} * \frac{MA}{MO} = 1$ (rel. 2)0,5p

$DC \parallel AB \Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA}$ (rel. 3)0,5p

Din (1) și (3) $\Rightarrow \frac{DO}{DB} = \frac{MO}{MA}$ (rel. 4). Înlocuind (4) în (2) $AE=EB$ 1p

Cum $\triangle ABO$ -isoscel $\Rightarrow EO \perp AB$. Dar $DC \parallel AB \Rightarrow EO \perp CD$ 1p

Oficiu3p