COLEGIUL NAȚIONAL IAȘI
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 2011

SOLUȚII

Clasa a V-a

1. Cum $A = 2\cdot 3^{330}, B = 2^{551}, C = 2\cdot 5^{220}$, iar $5^{220} = (5^2)^{110} < 3^{330} = (3^3)^{110} < (2^5)^{110} = 2^{550}$, rezultă că $C < A < B$.

2. a) Observăm că numărul $\overline{aabb} = 11\cdot(100\cdot a + b)$ este pătrat perfect dacă şi numai dacă $100a + b = 11\cdot k^2$. Atunci $11 | a + b$ şi, cum a şi b sunt cifre, deducem că a + b = 11. Mai mult, trebuie ca $9\cdot a + 1 = k^2$, de unde se obține unica soluție a = 7, b = 4.

b) Din teorema împărțirii cu rest obținem că $\overline{ab} = n\cdot b + c, \overline{bc} = n\cdot c + a, \overline{ca} = n\cdot a + b$. Prin adunarea acestor egalități găsim că $11\cdot(a + b + c) = (n + 1)\cdot(a + b + c)$, de unde n = 10. Deducem că $\overline{ab} = \overline{bc} = \overline{ca}$, prin urmare a = b = c.

3. a) $101\cdot 101 = 10201$ elemente.

b) Numerele trebuie să fie de forma $2^3\cdot 5^b$ cu $b \geq 3$ sau $2^a\cdot 5^3$ cu $a \geq 3$. În total, 98 + 98 = 196 numere au proprietatea dată.

4. Fie $a_1, a_2, ..., a_{2011}$ vârstele celor 2011 persoane. Presupunem prin reducere la absurd că oricare doi vecini au suma vârstelor cel mult egală cu 81: $a_1 + a_2 \leq 81, a_2 + a_3 \leq 81, ..., a_{2011} + a_1 \leq 81$. Prin adunarea tuturor acestor relații deducem că $2\cdot 3^{11} \leq 81\cdot 2011$, de unde $2\cdot 3^7 \leq 2011$, adică $4327 \leq 2011$ (absurd!). Astfel, presupunerea inițială este falsă şi urmează concluzia problemei.

Clasa a VI-a

1. a) Întrucât 2011 – 3 = M_3 + 1, rezultă că a = 7. Apoi, 2010 – 3 = M_3, deci c = 6, iar 1007 – 3 = M_3 + 2, prin urmare b = 2. Astfel, $x = 51,853(726)$.

b) Din $2n-1|4n+3$ şi $2n-1|4n-2$ rezultă că $2n-1|5$, de unde $2n-1 \in \{1,5\}$, deci $n \in \{1,3\}$.

2. a) Avem că $x = 405\cdot 9^{2009} = (8\cdot 50 + 5)\cdot 9^{2009} = 50y + 5\cdot 9^{2009}$, cu $5\cdot 9^{2009} < y$. Rezultă că restul cerut este $5\cdot 9^{2009}$.

b) Observăm că $\overline{xyz}|a = \overline{xyz}\cdot 10000 + 2010$ şi $\overline{xyz}|2010\cdot 1000 + \overline{xyz}$ dacă şi numai dacă $\overline{xyz}|2010$, deci când $\overline{xyz} \in \{2\cdot 67, 3\cdot 67, 5\cdot 67, 6\cdot 67, 10\cdot 67\}$.

3. Deoarece $AB = 2^{10}$ cm, obținem imediat că $M_kB = 2^{10-k}, \forall k = \overline{1,10}$. Atunci $M_4M_9 = M_4B -$ $-M_9B = 2^6 - 2^1 = 62$.

4. Cum $m(\sphericalangle AON) < m(\sphericalangle BON)$, rezultă că semidreapta [OB este interioară unghiului $\sphericalangle AOM$, deci $m(\sphericalangle MOB) = 60^\circ$. Dacă [OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle MOB$ şi [OF este bisectoarea lui $\sphericalangle$ AON, deducem că $m(\sphericalangle AOF) = 10^\circ$, deci $m(\sphericalangle AON) = 20^\circ$ şi atunci $m(\sphericalangle MON) = 110^\circ$.

Clasa a VII-a

1. Considerăm, fără a restrânge generalitatea, că $AB < AC$; în acest caz, $D \in [BM]$. Cum PN şi MN sunt linii mijlocii în triunghiul ABC, atunci $PN \parallel BC$ şi $MN \parallel AB$. Întrucât AB şi PD sunt concurente, rezultă că MN şi PD sunt concurente. Patrulaterul DMNP este trapez, având două laturi paralele şi două neparalele. Cum $MN = \frac{1}{2}AB$ (linie mijlocie în ΔABC) şi $DP = \frac{1}{2}AB$ (mediană în triunghiul dreptunghic ADB), atunci MN = DP, adică DMNP este trapez isoscel.

Dacă AB = AC, punctele M şi D coincid, iar patrulaterul DMNP degenerează într-un triunghi isoscel, asemenea cu cel iniţial, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$.

2. Folosind procedeul uzual de sumare telescopică, obţinem că suma elementelor lui A este $S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{99\cdot 100} = \frac{99}{100}$. Suma elementelor unei submulţimi B a lui A este strict pozitivă şi mai mică decât S, deci subunitară şi de aici rezultă că nu poate fi număr natural.

3. Este evident că unghiurile $\sphericalangle TQS$ şi $\sphericalangle TDM$ au măsurile de 45°. În triunghiul dreptunghic isoscel PDQ, mediana TD este egală cu jumătatea TQ a ipotenuzei. Cum QC = AD (= BC), $m(\sphericalangle CQT) = m(\sphericalangle ADT) = 135^\circ$ şi TQ = DT, rezultă că $\Delta CQT \equiv \Delta ADT$ (U.L.U.), de unde $\sphericalangle TCQ \equiv \sphericalangle DAT$. Însă unghiurile $\sphericalangle TCQ$ şi $\sphericalangle CMD$ sunt complementare şi atunci $\sphericalangle DAT$ şi $\sphericalangle CMD$ sunt complementare, deci $m(\sphericalangle ATM) = 90^\circ$, adică $AT \perp CM$. Întrucât $\sphericalangle CTQ \equiv \sphericalangle ATD$, deducem că $\sphericalangle STQ \equiv \sphericalangle MTD$, prin urmare $\Delta SQT \equiv \Delta MDT$ (U.L.U.) şi de aici rezultă concluzia problemei.

4. Avem că $z = \frac{17x + 5y}{2} = 8x + 2y + \frac{x+y}{2}$, deci $\frac{x+y}{2} = n, n \in \mathbb{N}$. Obţinem că $y = 2n - x$ şi $z = 5n + 6x$. Înlocuind aceste valori, deducem că $A = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot (x+n)^2(2x+3n)^2}{210}$, prin urmare $A = (x+n)^2(2x+3n)^2$ şi concluzia se impune.

Clasa a VIII-a

1. Fie A, B, C, D cele patru puncte necoplanare. În triunghiurile ABC, ACD şi ABD, medianele AM, AN şi AP sunt împărţite de centrele de greutate $G_1 \in AM, G_2 \in AN, G_3 \in AP$ în rapoartele $\frac{AG_1}{G_1M} = \frac{AG_2}{G_2N} = \frac{AG_3}{G_3P} = 2$. Se deduce că $G_1G_2 \parallel MN$ şi $G_1G_3 \parallel MP$, de unde $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$. Analog se procedează în cazul în care considerăm alte trei centre de greutate.

2. Numărătorul lui x se poate scrie sub forma $7a - 2$, unde $a = \overline{111...1}$ este număr de n cifre; procedând analog, obţinem că $x = \frac{7a-2}{7a+1}$ şi $y = \frac{8a-3}{8a+1}$. Cum diferenţa celor două numere este $x - y = \frac{1+4a}{(7a+1)(8a+1)} > 0$, deducem că $x > y$.

3. a) Întrucât $SA \perp (ABC)$, iar $BD \subset (ABC)$, rezultă că $SA \perp BD$. Avem şi că $AC \perp BD$ (ABCD pătrat), prin urmare $BD \perp (SAC)$. Cum $SC \subset (SAC)$, deducem că $BD \perp SC$.

b) Fie O centrul pătratului ABCD. În ΔSAC construim $OQ \perp SC, Q \in SC$ şi demonstrăm că $OQ \perp BD$, deci OQ va fi perpendiculara comună celor două drepte. Într-adevăr, am arătat anterior că $BD \perp (SAC)$ şi, cum $OQ \subset (SAC)$, rezultă că $OQ \perp BD$. Din $\Delta OQC \sim \Delta SAC$ se obţine că $OQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

c) Construim $AT \perp BM, T \in BM$; cum $SA \perp (ABC)$, din teorema celor trei perpendiculare urmează că $ST \perp BM$, deci distanţa de la punctul S la dreapta BM este ST. Aria triunghiului ABM este jumătate din cea a pătratului ABCD, iar $BM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, prin urmare $AT = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. Cu teorema lui Pitagora în triunghiul SAT, calculăm $ST = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$.

4. Presupunem că numărul dat este raţional; rezultă că există $x \in \mathbb{Q}_+^*$ astfel încât $x^2 = n + \sqrt{n+1}$. În aceste condiţii $\sqrt{n+1} = x^2 - n \in \mathbb{Q}^*$ şi, cum n + 1 este număr natural nenul, există $y \in \mathbb{N}$ pentru care $y^2 = n+1$, deci $x^2 = y^2 + y - 1 \in \mathbb{N}^*$, cu $x \in \mathbb{Q}_+^*$ şi $y \in \mathbb{N}^*$. Deducem că $x \in \mathbb{N}^*$. Însă $x^2 = y^2 + y - 1 > y^2$ şi $x^2 = y^2 + y - 1 < y^2 + 2y + 1 = (y+1)^2$, aşadar $y^2 < x^2 < (y+1)^2$, $x, y \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este imposibil. Presupunerea făcută este falsă, deci numărul $\sqrt{n + \sqrt{n+1}}$ este iraţional.