Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Sighişoara, 2 Aprilie 2013

CLASA a V-a

Problema 1. Un număr natural de patru cifre, diferite două câte două, având forma $\overline{abcd}$, se numeşte *interesant* dacă $a \cdot d + b \cdot c = 33$. Arătaţi că suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11.

Problema 2. Considerăm o descompunere a tablei de şah 8×8 în p dreptunghiuri care nu se suprapun, astfel încât fiecare dreptunghi să conţină un număr întreg de pătrăţele, dintre care jumătate să fie albe şi să nu existe două dreptunghiuri având acelaşi număr de pătrăţele. Determinaţi valoarea maximă a lui p.

Problema 3. Fie $a,\ b,\ c,\ d,\ x,\ y,\ z,\ t$ cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ şi

$$\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}.$$

Determinaţi toate valorile posibile ale sumei $S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$.

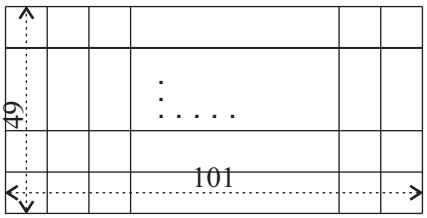
Problema 4. Elevii unei clase merg pe o potecă de munte, unul în spatele celuilalt. Când Andrei a ajuns la cabană, în cabană se aflau deja jumătate din numărul elevilor aflaţi încă pe traseu. Bianca a sosit a zecea după Andrei, iar după ea au rămas de două ori mai puţini elevi decât cei ajunşi înaintea ei la cabană. Câţi elevi sunt în acea clasă?

CLASA a VI-a

Problema 1. Ana, Barbu, Carmen şi Dan au de rezolvat 60 de probleme. Ana a rezolvat 45 dintre ele, Barbu a rezolvat 48, Carmen a rezolvat 44, iar Dan a rezolvat 47 de probleme. Arătaţi că probabilitatea ca o problemă din cele 60 să fie rezolvată de toţi cei patru este cel puţin egală cu $\frac{1}{15}$.

Problema 2. Dreptunghiul din figura de mai jos este împărţit în 49×101 pătrate egale. În pătratul din stânga jos se află o monedă. Doi copii imaginează următorul joc: pe rând, fiecare dintre ei mută moneda din locul în care se află pe un pătrat oarecare situat la dreapta, pe aceeaşi linie sau pe un pătrat oarecare situat deasupra, pe aceeaşi coloană. Câştigă jucătorul care plasează moneda în pătratul din dreapta sus.

Arătaţi că primul jucător poate câştiga, oricum ar juca cel de-al doilea.



Problema 3. Se consideră numerele prime $p < q < r$ şi numărul natural nenul $a < p$. Numărul n este cel mai mic număr natural nenul care împărţit la $p,\ q$ şi r dă, de fiecare dată, restul cu a mai mic decât împărţitorul.

a) Determinaţi, în funcţie de $p,\ q,\ r$ şi a, numărul n.

b) Dacă $n = 1000$, determinaţi valorile posibile ale lui a.

Problema 4. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC$ şi $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$. Fie $D \in (BC)$ astfel încât $AD \perp BC$. Bisectoarea unghiului ABC intersectează dreapta AD în punctul I. Demonstraţi că $BA + AI = BC$.

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a V-a

Problema 1. *Soluţie.* Dacă $\overline{abcd}$ este număr interesant, atunci şi numerele $\overline{badc}$, $\overline{cdab}$, $\overline{acbd}$, $\overline{bdac}$, $\overline{cadb}$, $\overline{dbca}$ şi $\overline{dcba}$ sunt numere interesante. . . . . **2 p**

Din observaţia de mai sus deducem că numerele interesante se pot grupa, după această regulă, câte opt. . . . . **2 p**

Avem

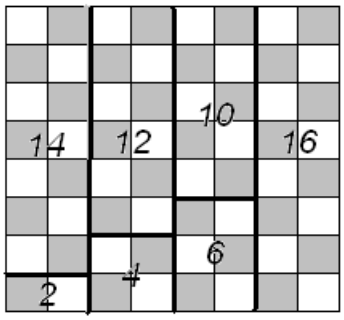
$$\overline{abcd}+\overline{badc}+\overline{cdab}+\overline{dcba}+\overline{acdb}+\overline{bdac}+\overline{cadb}+\overline{dbca}=2222\cdot(a+b+c+d)$$

care este multiplu de 11. În concluzie, suma tuturor numerelor interesante de patru cifre este multiplu de 11. . . . . **3p**

Problema 2. *Soluţie.* Dacă $p \geq 8$, dreptunghiurile vor conţine, în total, cel puţin $2+4+6+8+10+12+14+16=72$ pătrăţele, ceea ce este imposibil, tabla de şah având numai 64 de pătrăţele. . . . . **4 p**

Pentru $p=7$ avem posibilitatea să descompunem tabla.

Iată un exemplu: . . . . . **3 p**



Problema 3. *Soluţie.* Cum $\overline{xyzt}=\overline{dcba}-\overline{abcd}$ rezultă $t=10+a-d$. . . . . **1 p**

Cazul I.

Dacă $b=c$, atunci $z=y=9$ şi $x=d-a-1$. . . . . **1 p**

Cazul II.

Dacă $b<c$, atunci $z=9+b-c$, $y=c-b-1$ şi $x=d-a$. . . . . **1 p**

Avem $\overline{xyzt}+\overline{tzyx}=1001(x+t)+110(y+z)$. . . . . **2 p**

În cazul I

$x+t=9$ şi $y+z=18$, de unde $S=9009+1980=10989$. . . . . **1 p**

În cazul II

$x+t=10$ şi $y+z=8$, de unde $S=10010+880=10890$. . . . . **1 p**

Problema 4. *Soluţie.* Să presupunem că Andrei se află pe poziţia n. Atunci înaintea lui sunt $n-1$, iar în urma lui sunt $2n-2$ elevi. . . . . **1 p**

Bianca se află pe poziţia $n+10$. Înaintea ei sunt $n+9$, iar în urma ei sunt $\frac{n+9}{2}$. . . . . **2 p**

Numărul elevilor, raportat la Andrei, este $n+2n-2=3n-2$.

Numărul elevilor, raportat la Bianca, este $n+10+\frac{n+9}{2}$.

Obţinem ecuaţia

$$3n-2=n+10+\frac{n+9}{2}$$

cu soluţia $n=11$. . . . . **3 p**

Numărul de copii este 31. . . . . **1 p**

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE, CLASA a VI-a

Problema 1. *Soluţie.* Ana nu rezolvă 15 probleme, Barbu nu rezolvă 12 probleme, Carmen nu rezolvă 16 probleme, Dan nu rezolvă 13 probleme. ..... **2 p**

În total, pot rămâne cel mult $15 + 12 + 16 + 13 = 56$ de probleme care să fie nerezolvate de cel puţin un copil. ..... **2 p**

Cum sunt 60 de probleme, există cel puţin 4 probleme rezolvate de toţi copii. ..... **2 p**

De aici probabilitatea ca o problemă să fie rezolvată de toţi copii este de cel puţin $\frac{4}{60}$, adică $\frac{1}{15}$ ..... **1 p**

Problema 2. *Soluţie.*

Câştigă jucătorul care ocupă primul un pătrăţel situat pe diagonala cu capetele în poziţiile $(53, 1)$ şi $(101, 49)$. ..... **2 p**

Primul jucător mută moneda pe orizontală la dreapta până la poziţia 53. Moneda se va afla în pătratul $(53, 1)$. ..... **3 p**

Mai departe, la orice mutare efectuată de cel de-al doilea jucător pe o direcţie (orizontală sau verticală) cu un anumit număr de căsuţe, primul jucător mută pe cealaltă direcţie un număr identic de căsuţe, astfel încât să ajungă pe poziţia $(53+i, i+1)$ cu $1 \leq i \leq 48$, adică pe diagonala pătratului de latură 49 şi cu unul dintre vârfuri în colţul din dreapta sus, de poziţie $(101, 49)$. ..... **2 p**

Problema 3. *Soluţie:* a) Din enunţ $n = pc_1 + p - a$ sau $n + a = p(c_1 + 1)$, de unde deducem că $p \mid n + a$.

Analog deducem $q \mid n + a$ şi $r \mid n + a$. ..... **2 p**

Cum $p,\ q,\ r$ sunt numere prime diferite rezultă că $pqr \mid n + a$, de unde $n = pqr - a$. ..... **1 p**

b) $n = 1000$ implică $pqr - a = 1000$. Din $a < p$ rezultă că $pqr - p < 1000$ sau $p(qr - 1) < 1000$. ..... **1 p**

Dacă $p \geq 11$, atunci $q \geq 13$ şi $r \geq 17$, de unde $p(qr-1) \geq 11 \cdot (13 \cdot 17 - 1)$, adică $p(qr - 1) \geq 1000$. Deducem că $p \in \{2, 3, 5, 7\}$. ..... **1 p**

Deoarece $a < p$ avem $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dacă $a = 1$ obţinem soluţia $p = 7, q = 11, r = 13$. ..... **1 p**

Justificarea faptului că celelalte cazuri nu sunt posibile. ..... **1 p**

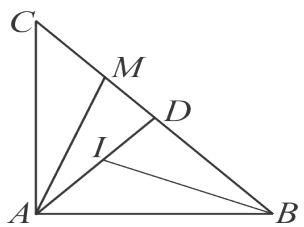
Problema 4. *Soluţie.* Triunghiul ABC isoscel de bază $[BC]$ şi $m(\widehat{BAC}) = 90°$ implică $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACB}) = 45°$.

Din $[BI$ bisectoarea unghiului ABC rezultă $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CBI}) = 22°30'$. ..... **2 p**

Considerăm punctul $M \in (BC)$ astfel încât $AB = BM$ şi atunci triunghiul ABM este isoscel de bază $[AM]$, de unde $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{BMA}) = \frac{180° - m(\widehat{ABM})}{2} = \frac{135°}{2} = 67°30'$. ..... **2 p**

Avem $m(\widehat{CAM}) = m(\widehat{BAC}) - m(\widehat{BAM}) = 90° - 67°30' = 22°30'$.

În triunghiul isoscel ABC, de bază $[BC]$, cum AD este înălţime rezultă $[AD$ bisectoarea unghiului BAC, de unde $m(\widehat{BAD}) = 45°$.

Din $AB = AC$, $m(\widehat{ABI}) = m(\widehat{CAM}) = 22°30'$ şi $m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ACM}) = 45°$, conform cazului de congruenţă U.L.U. obţinem $\triangle ABI \equiv \triangle CAM$, de unde $AI = CM$.

Avem $BC = BM + MC = AB + AI$. ..... **3 p**